REGLAS DE DERIVACIÓN

1.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL.

Consideremos una función *f* definida en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in D$. Se dice que *f* es *derivable* en el punto x_0 si el cociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tiene límite finito cuando *x* tiende a x_0. A este límite, si existe (finito o infinito), se le denomina *derivada* de *f* en el punto x_0 y se representa por:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si, en general, al incremento de la variable, es decir $x-x_0$, lo representamos por *h*, el límite anterior quedará así:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable $\forall x \in D$, a la siguiente función se le denomina *función derivada* (o, únicamente, *derivada*) de *f*:

$$\begin{aligned} f': D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad f'(x) \end{aligned}$$

2.- REGLAS DE DERIVACIÓN

2.1.- Derivadas de la suma, el producto y el cociente

Sean f y g dos funciones derivables $\forall x \in D$. Entonces $f+g$, $f \cdot g$, $k \cdot f \ (\forall k \in \mathbb{R})$ y $f/g \ (\text{si } g \neq 0)$ también son derivables, y sus derivadas en un punto $x \in D$ son estas:

$$(f \pm g)'(x) = \left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = \left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(k \cdot f)'(x) = \left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \forall x \,/\, g(x) \neq 0$$

2.2.- Derivada de la función compuesta

Sean dos funciones f y g. Si f es derivable en un punto x y g es derivable en $f(x)$, entonces $g \circ f$ es derivable en x y su derivada viene dada por:

$$(g\circ f)'(x)=\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

A esta fórmula se denomina *regla de la cadena*.

2.3.- Derivada de la función recíproca

Consideremos una función biyectiva f y su función recíproca f^{-1}. Si f es derivable en $x\in D$ y $f'(x)\neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $y=f(x)$ y su derivada es la siguiente:

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

La expresión anterior se obtiene de aplicar la regla de la cadena para derivar funciones compuestas. Así, sabiendo que f y f^{-1} son derivables y teniendo en cuenta que se verifica que $f(f^{-1}(y))=y$ (donde $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$), al derivar respecto de y:

$$\left(f(f^{-1}(y))\right)'=f'(f^{-1}(y))\cdot\left(f^{-1}\right)'(y)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{f'(x)}$$

2.4.- Derivación logarítmica

En este apartado se muestra cómo se obtiene dicha derivada de la exponencial $y=a^x$.

Sea $y=a^x \;\Rightarrow\; \mathrm{L}y=\mathrm{L}(a^x)=x\cdot\mathrm{L}a$. Derivamos ahora respecto de la variable x en ambos lados de esa igualdad teniendo en cuenta que $y=a^x$, esto es, que $\mathrm{L}y=\mathrm{L}(y(x))$ es una función compuesta que se ha de derivar mediante la regla de la cadena. Para terminar, despejamos la derivada que queremos obtener, es decir y':

$$\mathrm{L}y=x\cdot\mathrm{L}a \quad\overset{\text{derivar respecto de }x}{\Rightarrow}\quad \frac{y'}{y}=\mathrm{L}a\Rightarrow y'=a^x\cdot\mathrm{L}a$$

Análogamente, consideremos la función $y=[f(x)]^{g(x)}$, donde f y g son dos funciones derivables. Para calcular su derivada procederemos como en el caso anterior:

$$\mathrm{L}y=\mathrm{L}\left[[f(x)]^{g(x)}\right]=g(x)\cdot\mathrm{L}[f(x)]$$

Y ahora derivamos respecto de x:

$$\frac{y'}{y}=g'(x)\cdot\mathrm{L}[f(x)]+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}$$

Por último, despejamos la derivada:

$$y' = \left[g'(x) \cdot \mathrm{L}\left[f(x) \right] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right] \cdot \left[f(x) \right]^{g(x)}$$

2.5.- Reglas básicas de derivación

En esta tabla se presentan las derivadas de las funciones elementales:

$y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{R}$	$y = \left[f(x) \right]^n \Rightarrow y' = n \cdot \left[f(x) \right]^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \mathrm{L}a \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ a > 0$	$y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \mathrm{L}a$
$y = \mathrm{L}x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$	$y = \mathrm{L}\left[f(x) \right] \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$	$y = \sin\left[f(x) \right] \Rightarrow y' = f'(x) \cdot \cos\left[f(x) \right]$
$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$	$y = \cos\left[f(x) \right] \Rightarrow y' = -f'(x) \cdot \sin\left[f(x) \right]$
$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan\left[f(x) \right] \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\cos^2\left[f(x) \right]}$
$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin\left[f(x) \right] \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x) \right]^2}}$
$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos\left[f(x) \right] \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-\left[f(x) \right]^2}}$
$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan\left[f(x) \right] \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+\left[f(x) \right]^2}$

3.- EJEMPLOS

1.- Demostrar que las derivadas de las funciones arco seno, arco coseno y arco tangente son las que aparecen en la tabla anterior.

Estas funciones son, respectivamente, las recíprocas de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Luego se derivan según el método expuesto en el apartado 2.3.

- $y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

  En esta última ecuación derivaremos respecto de x, teniendo en cuenta que $y = y(x)$ y, por lo tanto, que se ha de aplicar la regla de la cadena:

$$1 = y' \cdot \cos y \Leftrightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora sólo falta expresar este resultado en función de x:

$$y' = \frac{1}{\cos y} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

  Igual que en el caso anterior, aquí también derivaremos respecto de x:

$$1 = -y' \cdot \sin y \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{\sin y}$$

  Y daremos el resultado en función de x:

$$y' = -\frac{1}{\sin y} \overset{(*)}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(*)\ \sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 y = 1 - \sin^2 y \Rightarrow |\cos y| = \sqrt{1-\sin^2 y} \\ \sin^2 y = 1 - \cos^2 y \Rightarrow |\sin y| = \sqrt{1-\cos^2 y} \end{cases}$$

  $y = \arcsin x$ donde $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Entonces $\cos y \ge 0 \Rightarrow |\cos y| = \cos y$

  $y = \arccos x$ donde $0 \le y \le \pi$. Entonces $\sin y \ge 0 \Rightarrow |\sin y| = \sin y$

- $y = \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y$

  Derivando respecto de x:

$$1 = \frac{y'}{\cos^2 y} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} =$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

2.- Calcular la derivada de la función $y = x^x$.

Utilizaremos la derivación logarítmica que se ha mostrado en el apartado 2.4. para derivar funciones exponenciales.

$$y = x^x \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}y = \mathrm{L}\left(x^x\right) = x \cdot \mathrm{L}(x)$$

Y en esta última igualdad derivamos respecto de x:

$$\frac{y'}{y} = \mathrm{L}(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \mathrm{L}(x) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y' = y \cdot [\mathrm{L}(x)+1] = x^x \cdot [\mathrm{L}(x)+1]$$

3.- Calcular la derivada de la función $y = (\sin x)^{x^2+3}$.

En este ejemplo, como en el anterior, no hay más que aplicar la derivación logarítmica.

$$y = (\sin x)^{x^2+3} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}y = \mathrm{L}\left[(\sin x)^{x^2+3}\right] = (x^2+3) \cdot \mathrm{L}(\sin x)$$

Y al derivar respecto de x:

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \mathrm{L}(\sin x) + (x^2+3) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = (\sin x)^{x^2+3} \cdot \left[2x \cdot \mathrm{L}(\sin x) + (x^2+3) \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

4.- Calcular las derivadas de las funciones hiperbólicas.

- $y = \mathrm{Sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $y = \mathrm{Ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Luego, $(\mathrm{Sh}\, x)' = \mathrm{Ch}\, x \quad \text{y} \quad (\mathrm{Ch}\, x)' = \mathrm{Sh}\, x$

De estas expresiones se obtiene la derivada de la tangente hiperbólica:

- $y = \mathrm{Th}\, x = \dfrac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}\, x} \quad \Rightarrow \quad y' = (\mathrm{Th}\, x)' = \dfrac{\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x}{\mathrm{Ch}^2 x} = \dfrac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}$

Por su parte, para obtener las derivadas de las recíprocas de estas funciones hiperbólicas, seguiremos el mismo método utilizado con las funciones trigonométricas.

- $y = \mathrm{ArgSh}\, x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Sh}\, y$

  Derivando respecto de x:

  $$1 = y' \cdot \mathrm{Ch}\, y \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{\mathrm{Ch}\, y} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

- $y = \mathrm{ArgCh}\, x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Ch}\, y$

  Derivando respecto de x:

$$1 = y' \cdot \mathrm{Sh}\, y \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{\mathrm{Sh}\, y} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(*)\ \mathrm{Ch}^2 y - \mathrm{Sh}^2 y = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Ch}^2 y = 1 + \mathrm{Sh}^2 y \Rightarrow |\mathrm{Ch}\, y| = \sqrt{1 + \mathrm{Sh}^2 y} \\ \mathrm{Sh}^2 y = \mathrm{Ch}^2 y - 1 \Rightarrow |\mathrm{Sh}\, y| = \sqrt{\mathrm{Ch}^2 y - 1} \end{cases}$$

$$\mathrm{Ch}\, y > 0 \quad \forall y \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Ch}\, y| = \mathrm{Ch}\, y$$

$y = \mathrm{ArgCh}\, x$ donde $y \geq 0$. Entonces $\mathrm{Sh}\, y \geq 0 \quad \forall y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathrm{Sh}\, y| = \mathrm{Sh}\, y$

- $y = \mathrm{ArgTh}\, x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Th}\, y$

Derivando respecto de x:

$$1 = \frac{y'}{\mathrm{Ch}^2 y} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \mathrm{Ch}^2 y = \frac{\mathrm{Ch}^2 y}{\mathrm{Ch}^2 y - \mathrm{Sh}^2 y} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{Ch}^2 y}{\mathrm{Ch}^2 y} - \dfrac{\mathrm{Sh}^2 y}{\mathrm{Ch}^2 y}} = \frac{1}{1 - \mathrm{Th}^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1 - x^2}$$