FUNCIONES

1.- CONCEPTO DE FUNCIÓN

Se dice que una correspondencia *f* definida entre dos conjuntos *A* y *B* es una *función* (o *aplicación*), si a cada elemento del conjunto *A* le asigna un elemento y sólo uno del conjunto *B*.

De la definición anterior se deducen las siguientes ideas:

- La función f es una correspondencia que va de *A* a *B* (es decir, tiene un sentido). Al conjunto *A* se le denomina *conjunto origen* (también se dice que la función f está definida en el conjunto *A*) y *B* es el *conjunto imagen*. Al elemento *b* del conjunto *B* que la función f le asigna a cada elemento *a* del conjunto *A* se le denomina *imagen* y se escribe $b = f(a)$.

- Todos los elementos del conjunto *A* tienen una imagen y sólo una. Por lo tanto, no puede haber elementos en *A* que no tengan imagen, pero tampoco puede haber elementos que tengan más de una imagen. Sin embargo, dos elementos distintos de *A* pueden tener la misma imagen.

Analíticamente, la correspondencia anterior se escribe del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Por otra parte, la correspondencia entre los elementos de *A* y *B* puede ser de uno de estos tres tipos:

- *Inyectiva*: $\forall a, a' \in A \,/\, a \neq a' \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(a')$ (elementos distintos de *A* tienen imagen distinta).

- *Suprayectiva*: $\forall b \in B,\ \exists a \in A \,/\, f(a) = b$ (todos los elementos de *B* son imagen de algún elemento de *A*).

- *Biyectiva*: cuando es inyectiva y suprayectiva a la vez.

1.1.- Función recíproca

La imagen recíproca de un elemento $b \in B$ se define del modo siguiente:

$$f^{-1}(b) = \left\{ a \in A \,/\, f(a) = b \right\}$$

Como se ha dicho en la definición de función, elementos distintos de *A* pueden tener la misma imagen por lo tanto, si $\exists a, a' \in A \,/\, a \neq a'$ y $f(a) = f(a') = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(b) = a'$. De ahí que, en general, f^{-1} no sea una función.

Si *f* es una función biyectiva, entonces tiene *función recíproca*,

$$f^{-1}: B \longrightarrow A$$

definida de la siguiente forma:

a cada elemento $b \in B$ le asigna un único elemento $a = f^{-1}(b)$ tal que $b = f(a)$.

Si f es biyectiva $\Rightarrow$ $\forall a \in A$ y $\forall b \in B,$ $f^{-1}(f(a)) = a$ y $f(f^{-1}(b)) = b$

NOTA: Es importante entender que f^{-1} es un símbolo que representa la función recíproca de f. En ningún caso se debe confundir con la expresión potencial de xponente -1. Es decir:

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \text{ pero } f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

1.2.- Función real de variable real

Si $B = \mathbb{R}$ (el conjunto de los números reales), entonces a f se le denomina *función real*. Si además también $A = \mathbb{R}$, entonces se dice que f es *una función real de variable real*. En general, los elementos de *A* los representaremos mediante la letra x, y ésta será la *variable* de la función. Por su parte, para designar a los elementos de *B* usaremos la letra y. Si los elementos y son la imagen de algún elemento x obtenida a través de f, lo representaremos mediante $y = f(x)$.

En muchas de las funciones reales de variable real que se utilizarán no todos los números reales tendrán imagen. Es decir, el conjunto origen no es todo $\mathbb{R}$ sino un subconjunto de él. El conjunto donde la función f está definida es el *dominio de definición* (*D*). Así pues, de ahora en adelante, la notación que usaremos será la siguiente:

$$\begin{aligned} f: D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

1.3.- Operaciones entre funciones

Consideremos dos funciones reales de variable real,

$$\begin{aligned} f: D_1 \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: D_2 \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

Las operaciones básicas entre ellas se definen del modo siguiente:

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D = D_1 \cap D_2$

Resta: $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in D = D_1 \cap D_2$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D = D_1 \cap D_2$

Producto por una constante: $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \quad \forall x \in D = D_1$ eta $\forall k \in \mathbb{R}$

Cociente: $(f / g)(x) = f(x) / g(x) \quad \forall x \in D = D_1 \cap D_2 - \{x / g(x) = 0\}$

Composición: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in D = \{x \in D_2 / g(x) \in D_1\}$

1.4.- Gráfica de una función

La representación gráfica de la función $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es el siguiente conjunto de puntos del plano:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\}$$

Se dice que la gráfica de *f* es la curva del plano dada en forma explícita por la ecuación $y = f(x)$, $\forall x \in D$.

Si *f* es biyectiva y, por lo tanto, existe su función recíproca f^{-1}, entonces las gráficas de ambas funciones son dos curvas simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

2.- FUNCIONES ELEMENTALES

2.1.- Función potencial

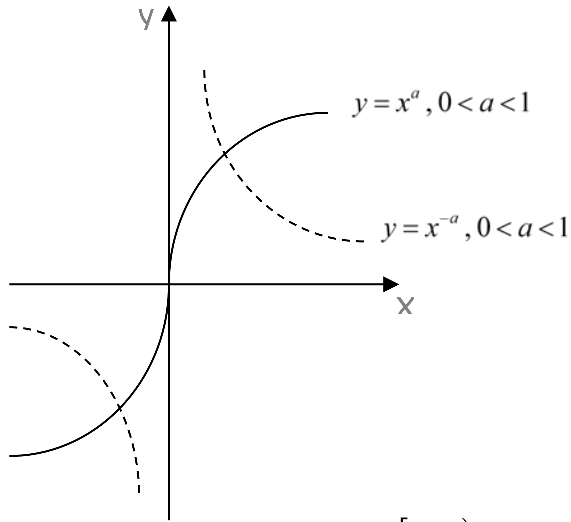
Para mostrar las características fundamentales de la función potencial $y = x^a$ vamos a diferenciar dos casos.

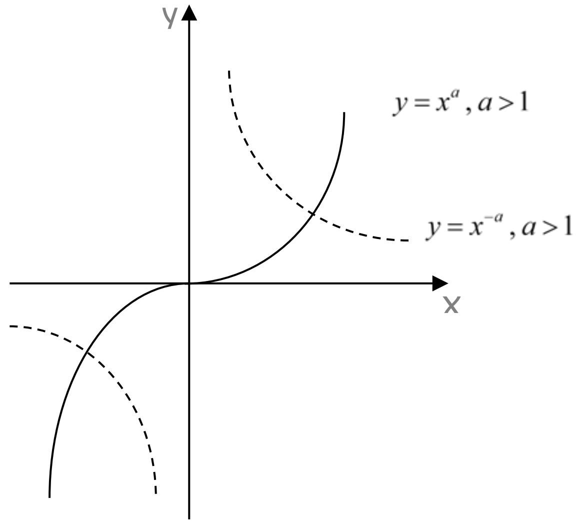
2.1.1.- Funciones potenciales con exponente racional.

$y = x^a$ donde $a = \dfrac{p}{q}$ irreducible, y $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

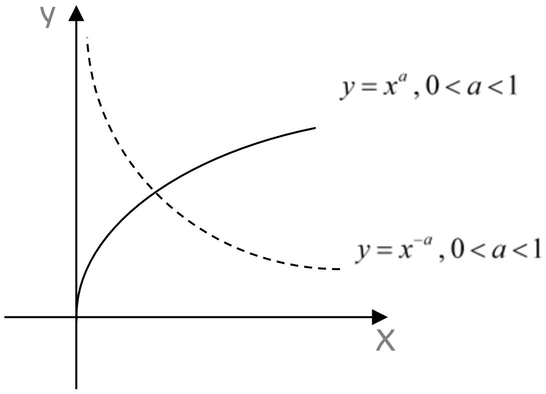
Según ***p*** y ***q*** sean pares o impares, tanto el dominio de esta función como los valores que tomará cambian. Así pues, pueden aparecer los siguientes casos:

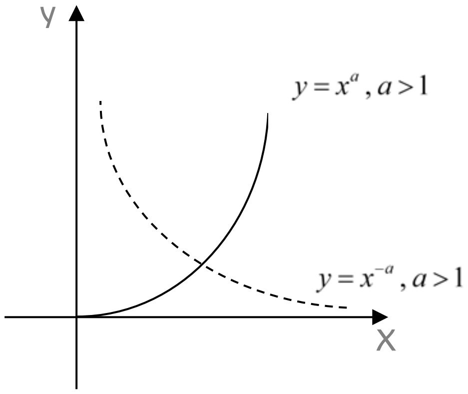
Si ***p*** y ***q*** impares $\Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \quad (a < 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\})$ e $y \in \mathbb{R}$





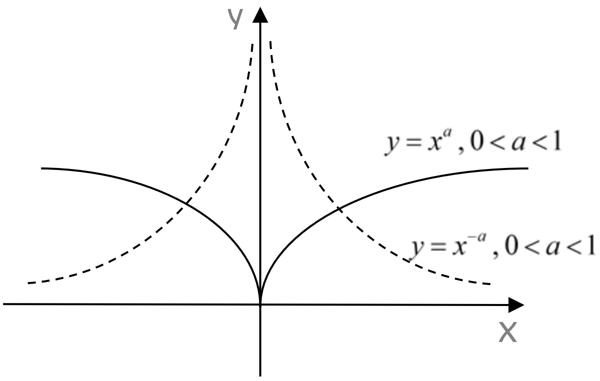
Si *p* impar y *q* par $\Rightarrow$ $D=[0,\infty)$ $(a<0 \Rightarrow D=(0,\infty))$ e $y\geq 0$

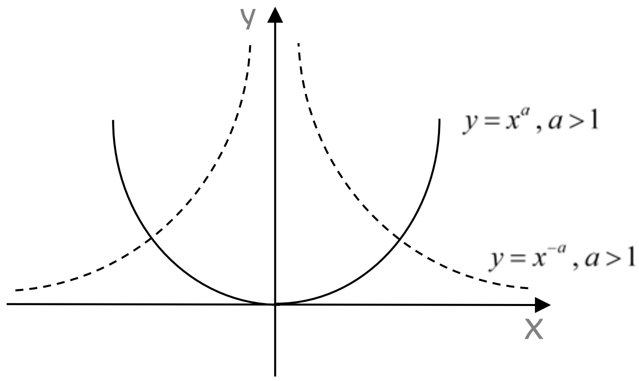




Nota: La función potencial $y=\sqrt{x}=x^{1/2}$ (*raíz cuadrada* de *x*) está incluida dentro de este caso. Es decir, dado un número real $x>0$, $\sqrt{x}=y>0$ / $y^2=x$. Así pues, $\sqrt{x}>0 \quad \forall x>0$. El número real $x>0$ también tiene una raíz cuadrada negativa, $-\sqrt{x}$.

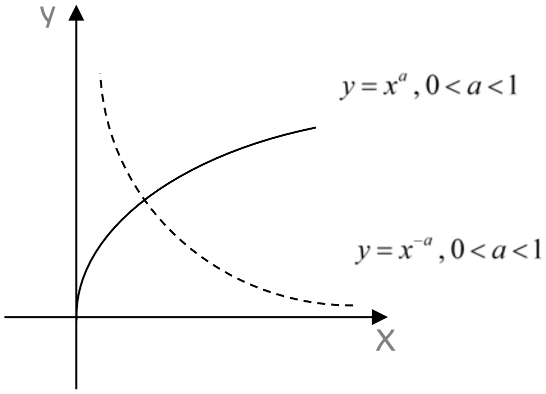
Si *p* par y *q* impar $\Rightarrow$ $D=\mathbb{R}$ $(a<0 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{0\})$ e $y\in[0,\infty)$

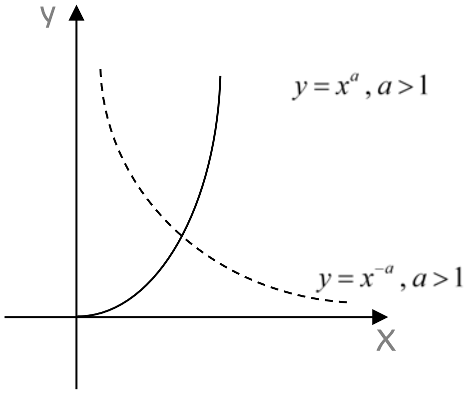




2.1.2.- Funciones potenciales con exponente irracional.

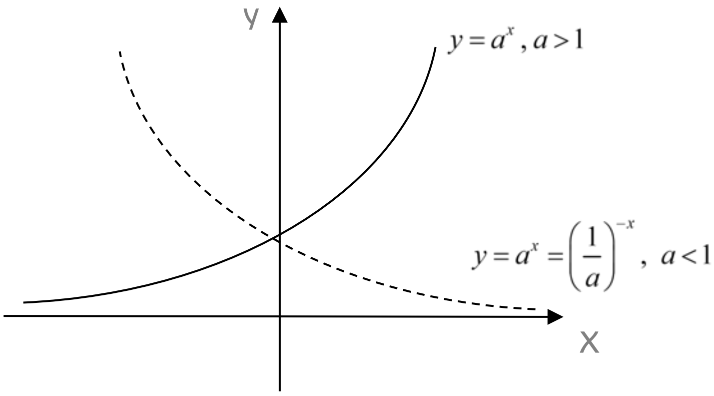
$y = x^a$ donde a es un número irracional. En este caso si $a > 0 \Rightarrow D = [0, \infty)$ y si $a < 0 \Rightarrow D = (0, \infty)$.





2.2.- Función exponencial

$y = a^x$, **donde** $a > 0$. Para estas funciones el dominio es $D = \mathbb{R}$ y las imágenes $y \in (0, \infty)$.



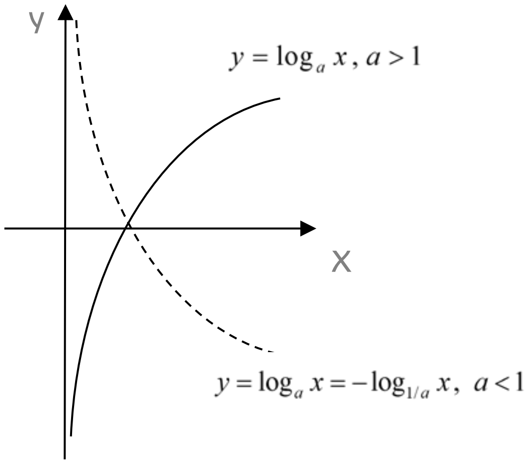
Las propiedades fundamentales de esta función son:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^0 = 1$
- $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

2.3.- Función logarítmica

$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Estas funciones están definidas en $D = (0, \infty)$ y las imágenes $y \in \mathbb{R}$.



Si $a=e \quad\Rightarrow\quad y=\log_e x=\mathrm{L}x$ es el logaritmo neperiano (o natural).

y $\forall a>0,\, a\neq 1,\quad y=\log_a x=\dfrac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}a}\quad \forall x>0$

Las propiedades fundamentales del logaritmo neperiano son las siguientes:

- $\mathrm{L}1=0$
- $\mathrm{L}(a\cdot b)=\mathrm{L}(a)+\mathrm{L}(b)\quad \forall a,b>0$
- $\mathrm{L}\left(\dfrac{a}{b}\right)=\mathrm{L}(a)-\mathrm{L}(b)\quad \forall a,b>0$
- $\mathrm{L}\left(a^b\right)=b\cdot\mathrm{L}(a)\quad \forall a>0$

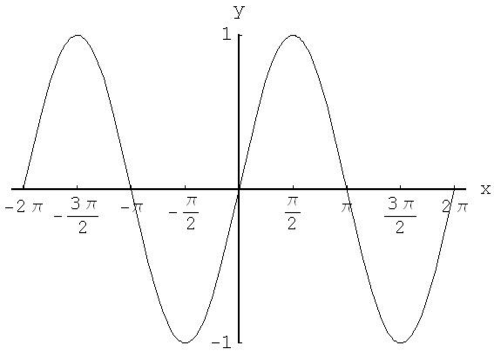
2.4.- Funciones trigonométricas

Estas funciones son seno, coseno y tangente, y a cada número real x le asignan las razones trigonométricas del ángulo de x radianes.

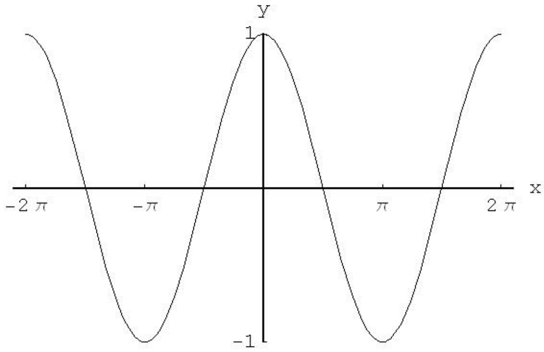
Los datos básicos sobre ellas son los siguientes:

$y=\sin x$ e $y=\cos x$ son funciones periódicas de periodo 2π, están definidas en $D=\mathbb{R}$ y sus imágenes $y\in[-1,1]$.

$y = \sin x$

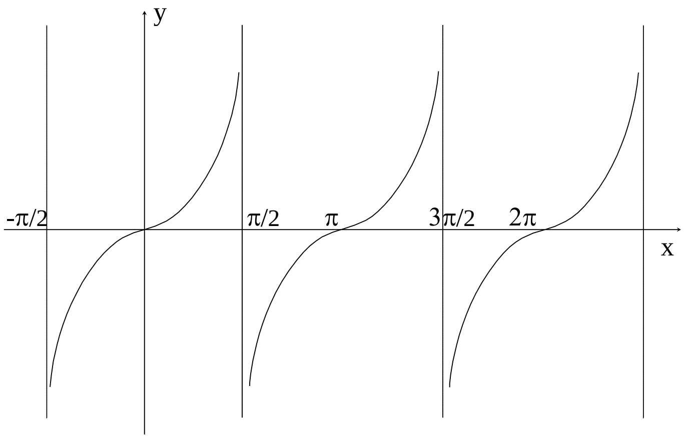


$y = \cos x$



Por su parte, $y = \tan x$ es una función periódica de periodo π, definida en $D = \mathbb{R} - \left\{ x = \frac{k\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$ y cuyo conjunto imagen es $\mathbb{R}$.

$y = \tan x$



Además de éstas, también se definen las funciones cosecante, secante y cotangente:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad y = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

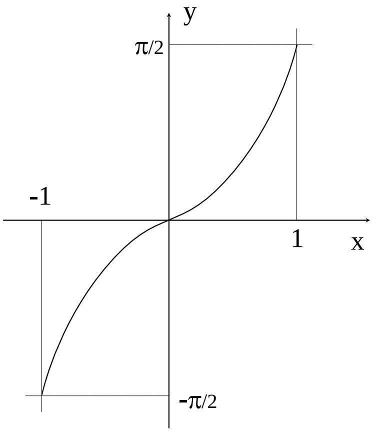
Como las funciones trigonométricas no son biyectivas, para definir sus reciprocas se tienen en cuenta las siguientes restricciones:

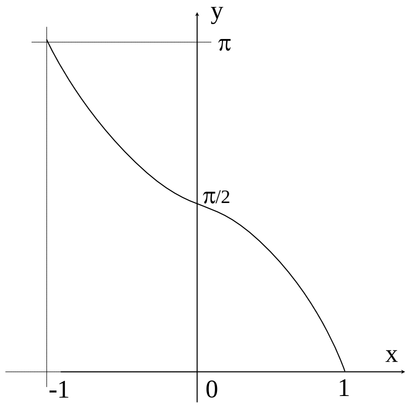
$y = \arcsin x \quad (\Leftrightarrow x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$

(arco seno)

$y = \arccos x \quad (\Leftrightarrow x = \cos y, 0 \le y \le \pi)$

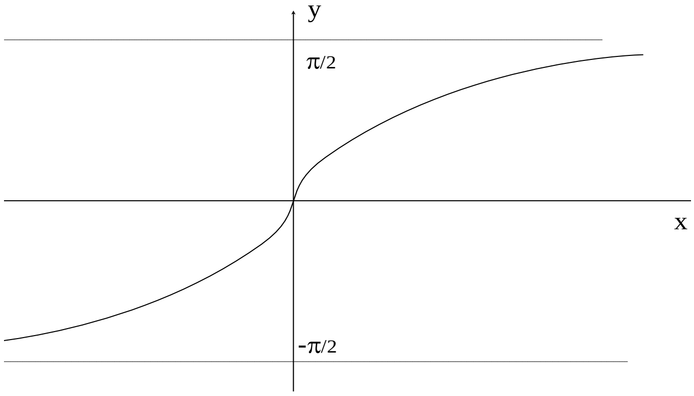
(arco coseno)





$y = \arctan x \quad (\Leftrightarrow x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$

(arco tangente)



2.5.- Funciones hiperbólicas

A las funciones de variable real definidas del modo siguiente se las denomina *funciones hiperbólicas*:

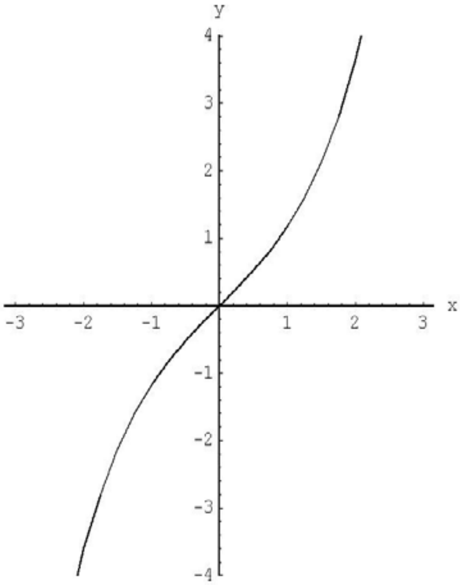
Seno hiperbólico: $\mathrm{Sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Coseno hiperbólico: $\mathrm{Ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

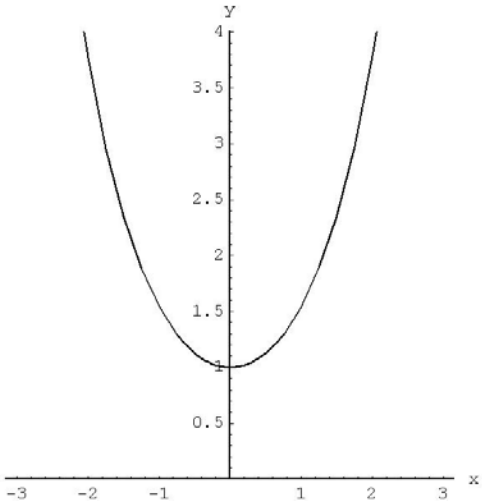
Tangente hiperbólica: $\mathrm{Th}x = \dfrac{\mathrm{Sh}x}{\mathrm{Ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Las tres están definidas en todo $\mathbb{R}$ y su conjunto imagen es, respectivamente, $\mathbb{R}$, $[1,\infty)$ y $(-1,1)$.

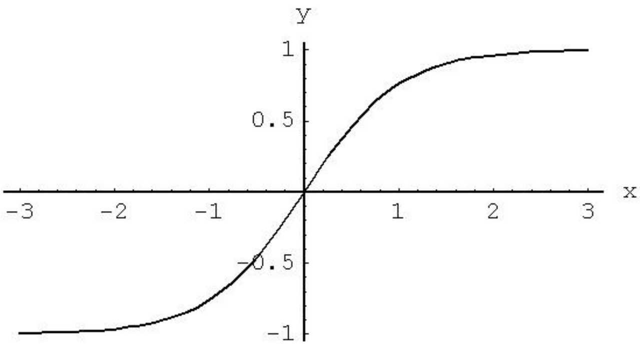
$y = \mathrm{Sh}x$



$y = \mathrm{Ch}x$ (Catenaria)

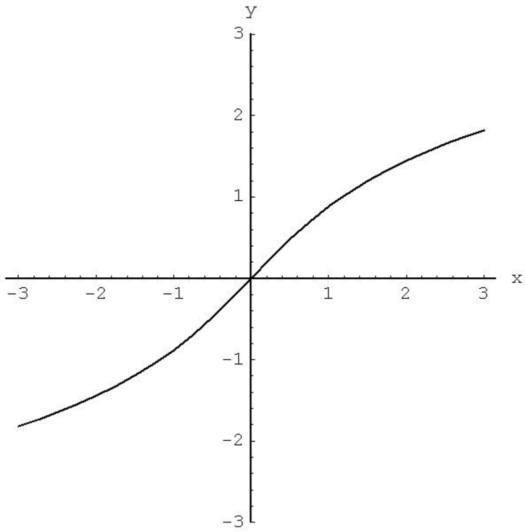


$y = \mathrm{Th}x$

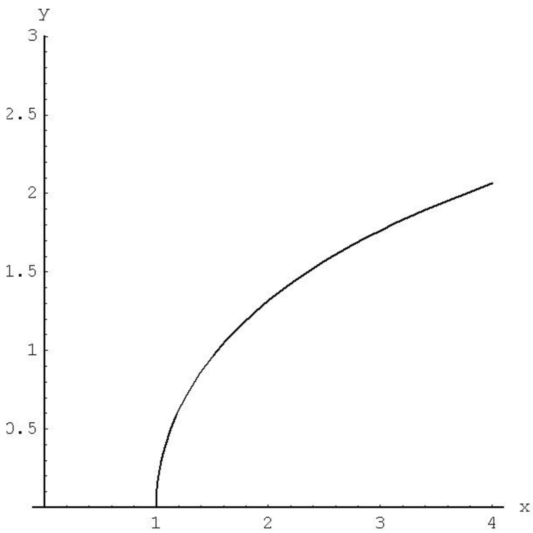


Y sus recíprocas:

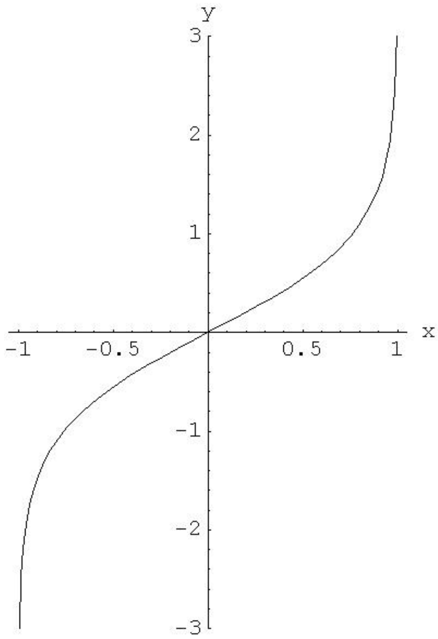
$y = \mathrm{ArgSh}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Sh}y$



$y = \mathrm{ArgCh}x \quad (\Leftrightarrow x = \mathrm{Ch}y,\ y \geq 0)$



$y = \mathrm{ArgTh}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Th}y$



2.6.- Valor absoluto

Dado un número real x, se denomina *valor absoluto* de x, y se escribe $|x|$, al número definido como sigue:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ -x & \forall x \leq 0 \end{cases} = \max\{x, -x\}$$

Esta función cumple las siguientes propiedades:

- $|x| > 0 \quad \forall x \neq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

- $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Nota: Tal y como se ha explicado al hablar de las funciones potenciales, $\sqrt{x} > 0 \ \ \forall x > 0$. Y esta idea coincide con la definición que se acaba de dar. Tiene que quedar claro, por tanto, que $\sqrt{x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$. En general, sin embargo, $\sqrt{x^2} = |x|$.

3.- EJEMPLOS

1.- Dada la función $y = f(x) = 2x + 1$, hallar su dominio, conjunto imagen y función recíproca (si existe).

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{donde} \quad D = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Veamos que f es biyectiva:

$\forall x, x' \in \mathbb{R} \ / \ x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$. Es decir, *f* es inyectiva.

$\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = y$. De hecho, $y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-1}{2}$. Luego, *f* es suprayectiva.

Por lo tanto, existe la función recíproca de *f*, definida como $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$

Y se verifican las siguientes igualdades:

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = x \quad \text{y} \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = y$$

2.- Dada la función $y = f(x) = x^2 + 1$, hallar su dominio, conjunto imagen y función recíproca (si existe).

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \text{donde } D = \mathbb{R}.$$

f no es inyectiva:

para $x = 2$ y $x' = -2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 4 = f(-2)$. En realidad, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(-x)$. Luego, *f* no es biyectiva y, por tanto, $\nexists f^{-1}$.

Más aún, tal y como se ha definido arriba, si se analiza *f* como una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, resulta que *f* tampoco es suprayectiva. Concretamente, si $y<1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \,/\, f(x)=y$. De hecho, el conjunto imagen de *f* es $[1,\infty)$.

Si de la ecuación $y=x^2+1$ se desea despejar *x*, se obtienen dos posibles valores:

$$x=\sqrt{y-1} \quad \text{y} \quad x=-\sqrt{y-1}$$

Siendo esto así, para poder definir la función recíproca de *f* se debe tener en cuenta la siguiente restricción:

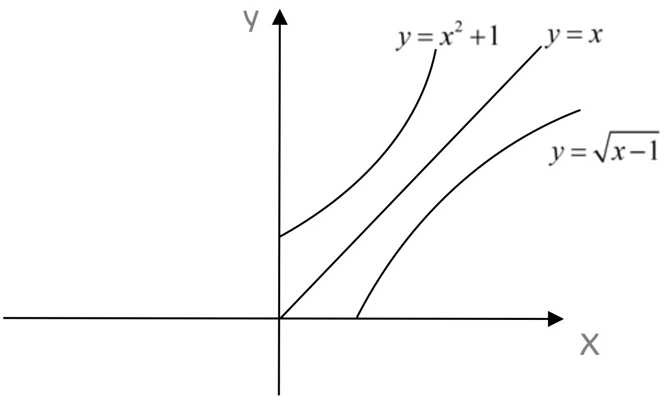
$$\begin{array}{rl} f:[0,\infty) \longrightarrow [1,\infty) \\ x \mapsto y=f(x)=x^2+1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} f^{-1}:[1,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \\ y \mapsto x=f^{-1}(y)=\sqrt{y-1} \end{array}$$

Y en tal caso se verificarán las igualdades:

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}(x^2+1)=\sqrt{x^2+1-1}=\sqrt{x^2}=|x| \overset{\forall x\geq 0}{=} x$$

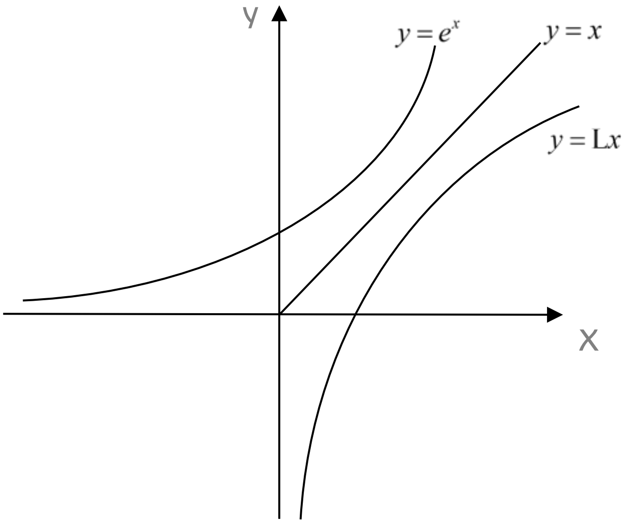
$$f\left(f^{-1}(y)\right)=f\left(\sqrt{y-1}\right)=\left(\sqrt{y-1}\right)^2+1=y-1+1=y$$

En la representación gráfica, la reciprocidad se transforma en simetría:



3.- Tal y como se ha visto en la definición, la función logarítmica es recíproca de la función exponencial: $y=\mathrm{L}x \quad \Leftrightarrow \quad x=e^y \quad \forall x>0$.

Y sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante:



4.- Dadas las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = x^2$, definir la composición ente ambas.

Existen dos posibilidades:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2\right) = \sin\left(x^2\right)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x$$

Como se muestra en este ejemplo, en general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

5.- Demostrar que $\left|x^{-1}\right| = |x|^{-1} \quad \forall x \neq 0$.

Nos valdremos de la propiedad $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para obtener el resultado:

$$\left|x \cdot \frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\frac{1}{x}\right| \quad \Leftrightarrow \quad 1 = |x| \cdot \left|\frac{1}{x}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} \quad \Leftrightarrow \quad \left|x^{-1}\right| = |x|^{-1}$$

6.- Expresar las siguientes funciones como funciones definidas a trozos:

a) $y = |x-1|$

$$y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \forall x \,/\, x-1 \geq 0 \\ 1-x & \forall x \,/\, x-1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \forall x \geq 1 \\ 1-x & \forall x \leq 1 \end{cases}$$

b) $y = \left|x^2 - 4\right|$

$$y = \left|x^2 - 4\right| = \begin{cases} x^2 - 4 & \forall x \,/\, x^2 - 4 \geq 0 \\ 4 - x^2 & \forall x \,/\, x^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Y, $x^2-4=(x-2)(x+2)\begin{cases}\geq 0 & \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\\ \leq 0 & \Leftrightarrow \quad x\in[-2,2]\end{cases}$

Luego, $y=\left|x^2-4\right|=\begin{cases}x^2-4 & \forall x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\\ 4-x^2 & \forall x\in[-2,2]\end{cases}$

c) $y=\left|1-e^{x+3}\right|$

$$y=\left|1-e^{x+3}\right|=\begin{cases}1-e^{x+3} & \forall x/1-e^{x+3}\geq 0\\ e^{x+3}-1 & \forall x/1-e^{x+3}\leq 0\end{cases}$$

Y, $1-e^{x+3}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+3}\leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x+3\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq -3$

Luego, $y=\left|1-e^{x+3}\right|=\begin{cases}1-e^{x+3} & \forall x\leq -3\\ e^{x+3}-1 & \forall x\geq -3\end{cases}$

d) $y=\sqrt{(\arcsin x)^2}$

$$y=\sqrt{(\arcsin x)^2}=\left|\arcsin x\right|=\begin{cases}\arcsin x & \forall x\in[0,1]\\ -\arcsin x & \forall x\in[-1,0]\end{cases}$$

e) $y=\sqrt{(\mathrm{L}x-2)^2}$

$$y=\sqrt{(\mathrm{L}x-2)^2}=\left|\mathrm{L}x-2\right|=\begin{cases}\mathrm{L}x-2 & \forall x/\mathrm{L}x-2\geq 0\\ 2-\mathrm{L}x & \forall x/\mathrm{L}x-2\leq 0\end{cases}$$

Y, $\mathrm{L}x-2\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}x\geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x\geq e^2$

Luego, $y=\sqrt{(\mathrm{L}x-2)^2}=\left|\mathrm{L}x-2\right|=\begin{cases}\mathrm{L}x-2 & \forall x\geq e^2\\ 2-\mathrm{L}x & \forall x/0<x\leq e^2\end{cases}$