RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

1.- PRIMERAS DEFINICIONES

Se denomina ***ángulo*** en el plano a la porción de plano comprendida entre dos semirrectas con un origen común denominado vértice. ***Ángulo central*** es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y los lados son radios de ella.

Un ***arco de circunferencia*** es una porción de dicha circunferencia limitada por dos puntos ordenados A y B, origen y extremo respectivamente. Con estos dos puntos se determinan dos arcos, uno al que denominaremos ***arco positivo***, obtenido al ir de A a B en **sentido contrario a las agujas del reloj** y otro, ***arco negativo***, obtenido al ir de B a A en el **sentido de las agujas del reloj.**

El grado sexagesimal, como unidad de medida de ángulos y arcos, corresponde a dividir un ángulo completo, toda la circunferencia para el arco, en 360 partes. En el Sistema Internacional, la unidad de medida de ángulos y arcos es el **radián.** Un ***radián*** se puede definir como la medida de un ángulo central cuyo arco correspondiente tiene una longitud igual al radio de la circunferencia.

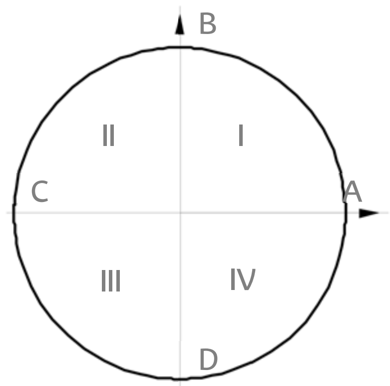
En la siguiente figura aparece la correspondencia entre grados sexagesimales y radianes para los ángulos y arcos correspondientes a un cuarto, la mitad, tres cuartos y la circunferencia completa. Así mismo se indica la numeración correspondiente a los cuatro cuadrantes. I: Primer cuadrante, II: Segundo cuadrante, III: Tercer cuadrante y IV: Cuarto cuadrante.

El arco AB mide: 90º = $\pi/2$ rad.

El arco AC mide: 180º = π rad.

El arco AD mide: 270º = $3\pi/2$ rad.

El arco AA mide: 360º = 2π rad.



2.- RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea un sistema de ejes cartesianos y una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio r. En la figura 2, sea $P(x,y)$ un punto sobre la misma y α el ángulo central correspondiente al arco AP. Las razones trigonométricas del ángulo α se definen a continuación:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

Si se considera r = 1 , entonces la abscisa del punto P es igual a $\cos\alpha$, mientras que la ordenada de P es igual a $\sin\alpha$ (Figura 3).

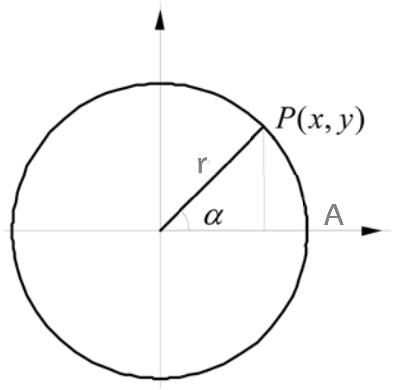


Fig. 2

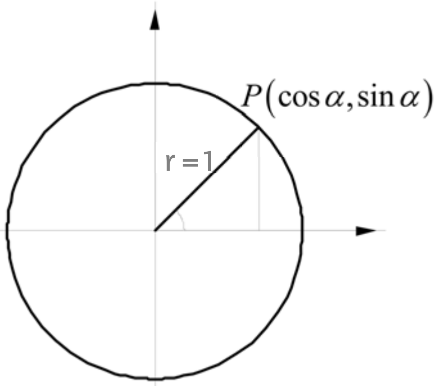


Fig.3

Teniendo esto en cuenta, en función del cuadrante en que se encuentre el extremo del arco, P, el signo de las razones trigonométricas variará tal y como se recoge en el siguiente cuadro:

	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
sinα	+	+	-	-
cosα	+	-	-	+
tanα	+	-	+	-
cscα	+	+	-	-
secα	+	-	-	+
cotanα	+	-	+	-

En la siguiente tabla aparecen los valores numéricos de algunos ángulos importantes del primer cuadrante expresados en radianes:

	$\alpha=0$	$\alpha=\pi/6$	$\alpha=\pi/4$	$\alpha=\pi/3$	$\alpha=\pi/2$
sinα	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tanα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

3.- RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

3.1.- Relaciones Fundamentales (Teorema de Pitágoras)

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo de la figura 4,

CC BY NC SA

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$

Dividiendo la relación (1) por $\cos^2\alpha$,

$$\boxed{\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha} \qquad (2)$$

Dividiendo la relación (1) por $\sin^2\alpha$,

$$\boxed{1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha} \qquad (3)$$

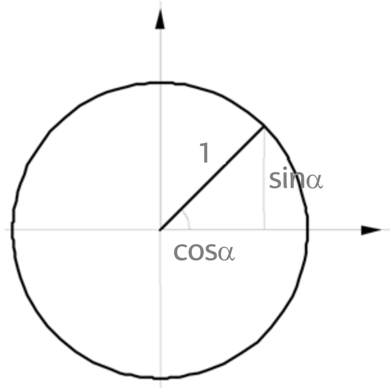


Fig. 4

3.2.- Ángulos opuestos.

Sea P el extremo del arco correspondiente al ángulo α y Q el extremo del arco correspondiente al ángulo opuesto , -α (Fig. 5). Teniendo en cuenta la igualdad de los triángulos rectángulos OPP' y OQP' de la figura 5, las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulo α y -α son:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

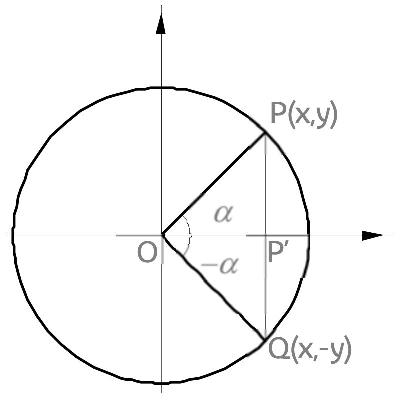


Fig. 5

3.3.- Ángulos suplementarios.

Sea P el extremo del arco correspondiente al ángulo α y Q el extremo del arco correspondiente al ángulo suplementario, π-α . Teniendo en cuenta la igualdad de los triángulos rectángulos OPP' y OQQ' de la figura 6, las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulo α y π - α son:

CC BY NC SA

$$\sin(\pi-\alpha)= \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

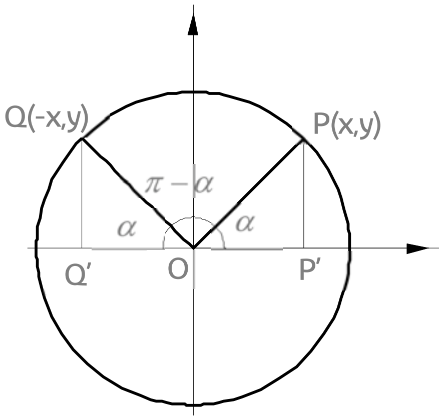


Fig. 6

3.4.- Ángulos que difieren en π radianes

Sea *P* el extremo del arco correspondiente al ángulo α y *Q* el extremo del arco correspondiente al ángulo $\pi+\alpha$ (Fig.7). Teniendo en cuenta la igualdad de los triángulos rectángulos OPP′ y OQQ′ de la figura 7, las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos α y $\pi+\alpha$ son:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)= \tan\alpha$$

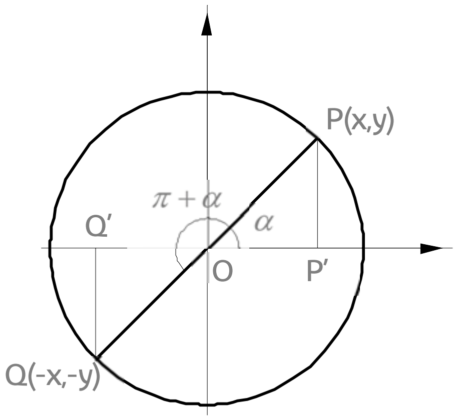


Fig. 7

3.5.- Ángulos complementarios

Sea *P* el extremo del arco correspondiente al ángulo α y *Q* el extremo del arco correspondiente al ángulo complementario $\pi/2$ - α. Teniendo en cuenta la igualdad de los triángulos rectángulos OPP′ y OQQ′ de la figura 8, las relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulo α y $\pi/2 - \alpha$ son:

CC BY NC SA

$$\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\tan(\pi/2-\alpha)=\cot\alpha$$

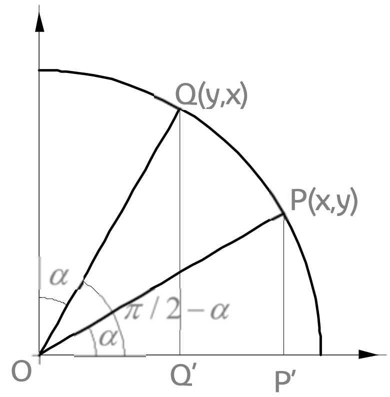


Fig. 8

3.6.- Razones trigonométricas de la suma o resta de ángulos

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta \tag{4}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{5}$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

3.7.- Razones trigonométricas del ángulo doble

Aplicando las expresiones anteriores al caso particular de $\alpha+\alpha$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha&=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\\ \cos 2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \tan 2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned} \tag{6}$$

3.8.- Razones trigonométricas del ángulo mitad

Despejando en la expresión (6) $\sin\alpha$ o $\cos\alpha$, en función de $\cos 2\alpha$, se obtienen las expresiones correspondientes al ángulo mitad:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

3.9.- Sumas y restas de senos y cosenos

3.9.1.- De Suma a Producto.

A partir de las expresiones (4) y (5) se puede transformar una suma/resta de senos o cosenos en un producto. Las expresiones resultantes son:

CC BY NC SA

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}$$
$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

3.9.2.- De Producto a suma.

Estas expresiones son de interés en el cálculo de integrales cuyo integrando es un producto de senos, cosenos, o seno por coseno, y se deducen fácilmente a partir de las expresiones anteriores.

$$\sin A\cdot\cos B=\frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$
$$\cos A\cdot\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$$
$$\sin A\cdot\sin B=-\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]$$

4.- FUNCIONES RECÍPROCAS DE LAS FUNCIONES TRIGONÓMETRICAS.

En el tema correspondiente a **Funciones** se tratarán tanto las funciones trigonométricas: sin, cos, tan, sec, csc y cot como sus correspondientes funciones recíprocas: arcsin, arccos, arctan, arcsec, arccsc y arccot. En ese punto simplemente se trata de presentar el significado de las expresiones matemáticas arcsin, arccos, etc.

El término $y=\sin\alpha$, o " y es el seno de α " se puede expresar de forma equivalente diciendo " α es el ángulo cuyo seno es y", que se representa matemáticamente como $\alpha=\arcsin y$.

En la expresión $\alpha=\arcsin y$ se cumple que para un valor concreto de y, por ejemplo ½, $\alpha_1=\frac{\pi}{6}$, $\alpha_2=\frac{5\pi}{6}$, $\alpha_3=\frac{13\pi}{6}$, ... son todos ellos ángulos cuyo seno vale ½. El conjunto de todos los ángulos cuyo seno vale ½ viene dado por $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\cup\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$ $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. El valor $\frac{\pi}{6}$, es decir, de los infinitos valores, el que pertenece al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ se denomina *valor principal.* Para las funciones arccos y arctan , el valor principal es el que pertenece al intervalo $\left[0,\pi\right]$

cc BY NC SA

5.- EJEMPLOS

1.- Expresar en radianes los siguientes ángulos dados en grados: 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 150º, 180º, 210º, 240, 270º y 360º.

$30^{\circ} = \frac{\pi}{6}$ rad $\qquad 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}$ rad $\qquad 60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$ rad

$90^{\circ} = \frac{\pi}{2}$ rad $\qquad 120^{\circ} = \frac{2\pi}{3}$ rad $\qquad 150^{\circ} = \frac{5\pi}{6}$ rad

$180^{\circ} = \pi$ rad $\qquad 210^{\circ} = \frac{7\pi}{6}$ rad $\qquad 270^{\circ} = \frac{3\pi}{2}$ rad

$360^{\circ} = 2\pi$ rad

2.- Indicar cuáles de los siguientes valores son posibles y cuáles no:

a) $\cos\alpha = 3$ b) $\tan\alpha = 1$ c) $\sin\alpha = 0$ d) $\sin\alpha = 2$ e) $\sin\alpha = 1/3$ y $\csc\alpha = -3$

Los valores de los apdos. b) y c) son posible. Los valores de los apdos. a) y d) son imposibles ya que el seno y el coseno de un ángulo deben estar comprendidos entre -1 y 1. El valor del apdo. e) es imposible ya que el seno y la cosecante de un ángulo deben tener el mismo signo.

3.- Siendo $f(x) = 2\sin 2x + 4\cos 2x$, calcular el valor de $f(\pi/3)$.

$$f(\pi/3) = 2\sin(2\pi/3) + 4\cos(2\pi/3) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$$

4.- Si $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ y $\sec\alpha = -\frac{5}{3}$, ¿a qué cuadrante pertenece el extremo P del arco α?

La tangente de un ángulo es positiva en los cuadrantes primero y tercero, mientras que la secante, igual que el coseno, es negativa en los cuadrantes segundo y tercero, luego el punto P debe pertenecer al tercer cuadrante.

5.- Factorizar la expresión $\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha$.

$$\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha = (\sin 3\alpha + \sin\alpha)(\sin 3\alpha - \sin\alpha) = 2\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 2\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha =$$

$$= (2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha)\cdot(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = \sin 4\alpha\cdot\sin 2\alpha$$

6.- Simplificar la expresión $\frac{\cos a}{1+\sin a} + \frac{\cos a}{1-\sin a}$.

$$\frac{\cos a}{1+\sin a}+\frac{\cos a}{1-\sin a}=\frac{\cos a\cdot(1-\sin a)+\cos a\cdot(1+\sin a)}{1-\sin^2 a}=\frac{2\cos a}{\cos^2 a}=\frac{2}{\cos a}$$

7.- Hallar todas las soluciones de la ecuación $2\cos^2 x-1=0$.

$$2\cos^2 x-1=0 \quad\Rightarrow\quad \cos^2 x=1/2 \quad\Rightarrow\quad \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los ángulos comprendidos entre 0 y 2π cuyo coseno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ son $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$, y aquellos cuyo coseno es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ son $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$. Si a cualquiera de estos valores se le suma un múltiplo de 2π, el coseno del ángulo resultante es el mismo, por lo que todas las raíces están dadas por $\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right\}$, $k=0\pm1\pm2\cdots$. Este conjunto se puede expresar de forma más sencilla como $\left\{\frac{(2k+1)\pi}{4}\right\}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

8.- Factorizar la expresión $\cos^4 a-\sin^4 a$.

$$\cos^4 a-\sin^4 a=\left(\cos^2 a+\sin^2 a\right)\cdot\left(\cos^2 a-\sin^2 a\right)=1\cdot\cos 2a=\cos 2a$$

9.- Calcular $\int_0^\pi \cos 2x\cdot\cos x dx$.

$$\int_0^\pi \cos 2x\cdot\cos x dx=\int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos 3x dx+\int_0^\pi \cos x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\sin 3x}{3}\right|_0^\pi+\sin x\Big|_0^\pi\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 3\pi-\sin 0}{3}+(\sin\pi-\sin 0)\right)=0$$

10.- Calcular el valor de cos[arcsen(-1)].

Sea $\alpha=\arcsin(-1) \quad\Rightarrow\quad \alpha=3\pi/2 \quad\Rightarrow\quad \cos\left[\arcsin(-1)\right]=\cos\left(3\pi/2\right)=0$.