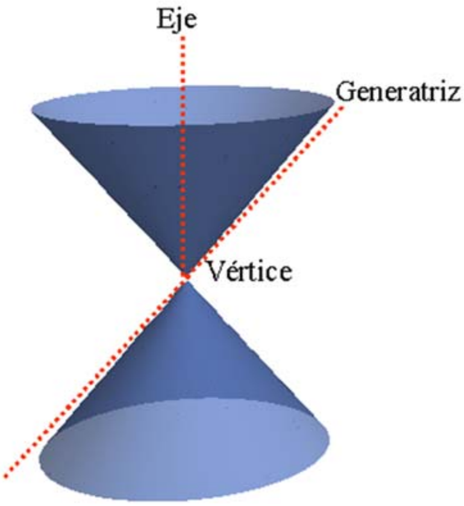
GEOMETRÍA ANALÍTICA: CÓNICAS

1.- GENERALIDADES

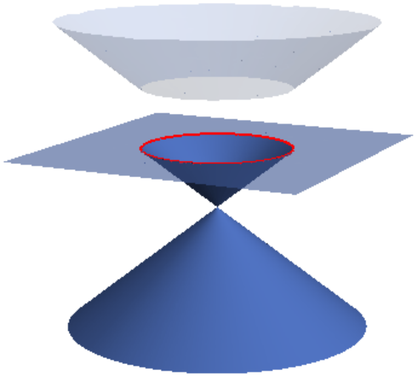
Se define *lugar geométrico* como el conjunto de puntos que verifican una propiedad conocida.

Las cónicas que estudiaremos a continuación se definen como lugares geométricos. Pero antes de deducir las ecuaciones correspondientes, vamos a ver cómo se deducen las cónicas a partir de una superficie plana.

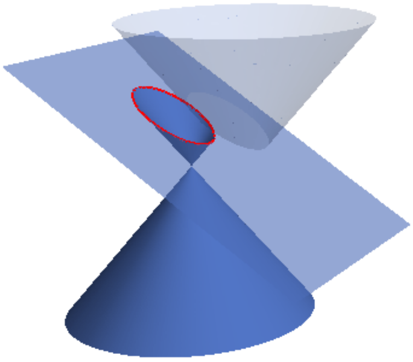
Se define una *superficie cónica de revolución* como la superficie que genera una recta, llamada generatriz, al girar alrededor de otra superficie fija o eje.



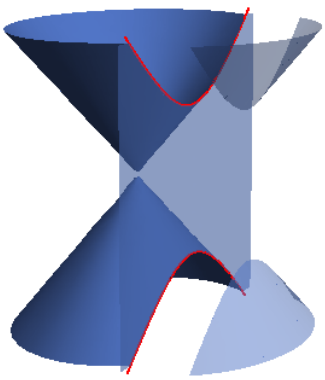
Al cortar esta superficie cónica de revolución con un plano, como se muestra en las figuras siguientes, se obtienen las cónicas que estudiaremos a continuación.



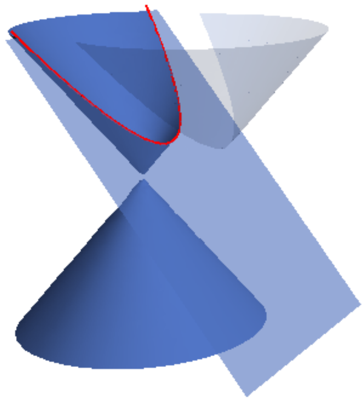
Circunferencia



Elipse



Hipérbola

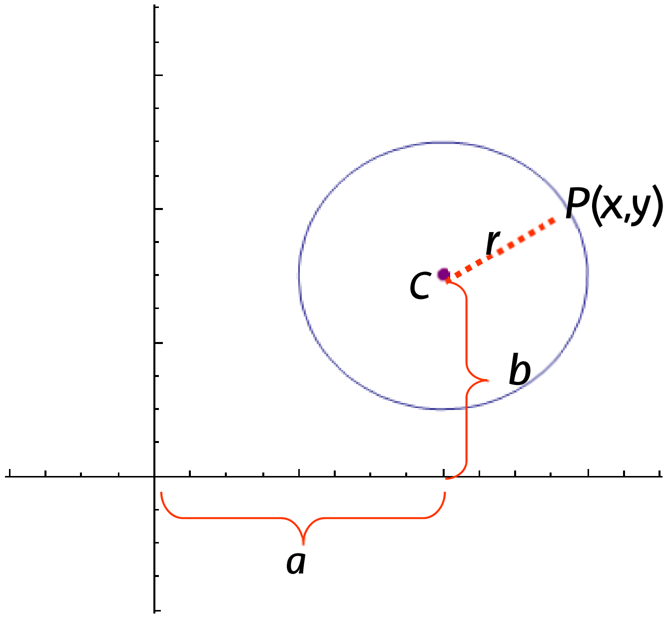


Parábola

2.- CIRCUNFERENCIA

Se define la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Es decir:

$$d(P,C)=r$$



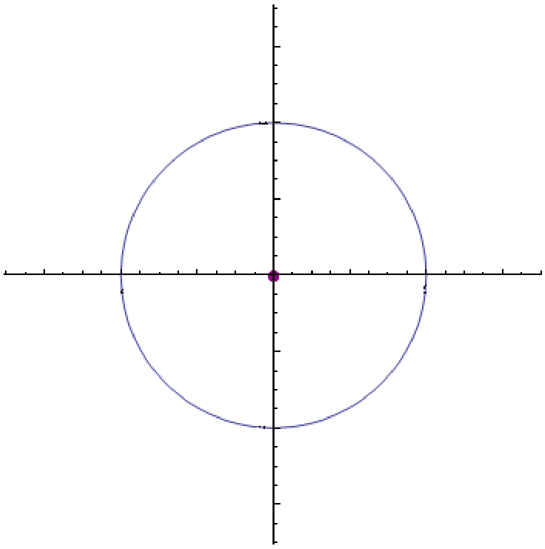
Como la distancia entre un punto cualquiera $P(x,y)$ y el centro $C(a,b)$ es siempre constante, r:

$$\sqrt{(x-a)^2}+\sqrt{(y-b)^2}=r \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Desarrollando la expresión anterior y agrupando términos semejantes, se obtiene la siguiente ecuación:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

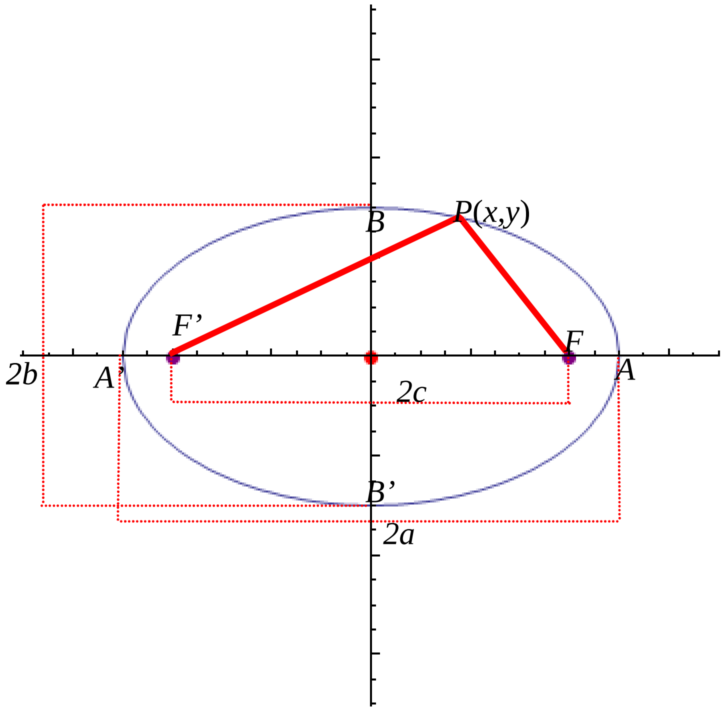
En el caso de que el centro de coordenadas esté en el origen $(0,0)$, la ecuación de la circunferencia se escribe $x^2+y^2=r^2$ y su representación gráfica viene dada a continuación.



3.- ELIPSE

Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos *F* y *F'*, es constante. Es decir:

$$d\left(P,F\right)+d\left(P,F'\right)=C,\quad C\in\mathbb{R}$$



Antes de deducir la ecuación, se explicarán brevemente los elementos que la definen y que aparecen en la figura anterior.

- F y F' son dos puntos fijos llamados *focos*. La recta que pasa por ellos se denomina *recta focal*, y, la distancia entre ellos *distancia focal*, representada por *2c*.

- Dado un punto P cualquiera, a los segmentos $\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$ se les llama *radio vector*, y verifican $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$.

- El segmento $\overline{AA'}$ es el eje mayor de la elipse y su distancia es $2a$.

- El segmento $\overline{BB'}$ es el eje menor de la elipse y su distancia es $2b$.

A continuación, se deducirá la ecuación de la elipse. Considerando como ejes coordenados los ejes de la elipse, las coordenadas de los focos serán $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ respectivamente.

Teniendo en cuenta que un punto $P(x,y)$ cualquiera de la elipse verifica:

$$d(P,F)+d(P,F')=2a$$

sustituyendo en esta expresión las coordenadas respectivas, obtenemos:

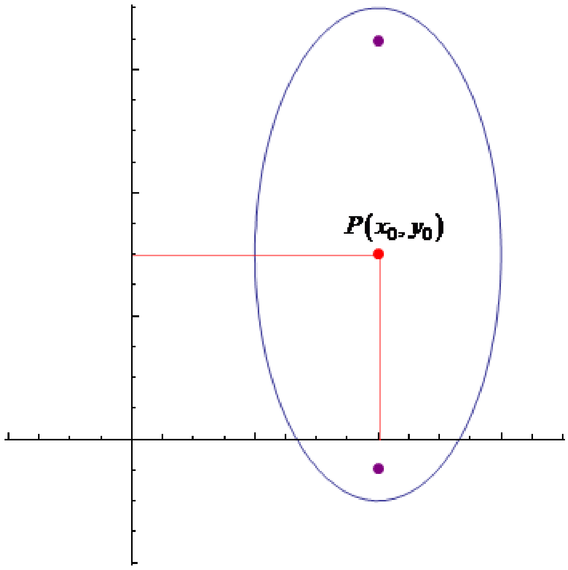
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a .$$

Haciendo las operaciones necesarias para eliminar la raíz cuadrada, y teniendo en cuenta que $a^2=b^2+c^2$, se obtiene que la expresión reducida de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ con } a,b>0$$

En el caso en que la elipse tenga el centro en el punto (x_0,y_0), la ecuación correspondiente es:

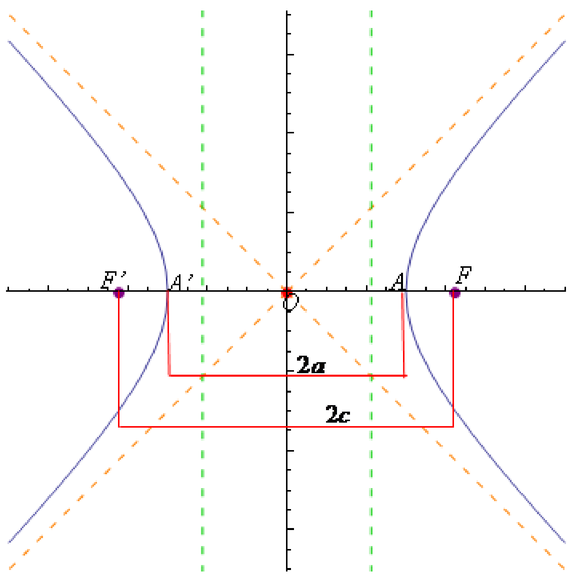
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad \text{con } a,b>0$$



4.- HIPÉRBOLA

Se define como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, *F* y *F'*, es constante. Es decir:

$$d(P,F)-d(P,F')=C, \quad C\in\mathbb{R}.$$



Análogamente a como se ha hecho para la elipse, se verán brevemente los elementos que intervienen en la hipérbola y están representados en la figura.

- *F* y *F'* son dos puntos fijos llamados focos. La distancia entre ellos es la *distancia focal*, representada por *2c*.

- Dado un punto $P(x,y)$ cualquiera, a los segmentos $\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$ se les llama *radio vector*, y verifican $\overline{PF}-\overline{PF'}=2a$

Pare deducir la ecuación, se considera como sistema de referencia aquél que está centrado en la hipérbola como se muestra en la figura anterior, en el que el eje focal coincide con el eje de abscisas. Así, las coordenadas de los focos serán $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ respectivamente.

Teniendo en cuenta que un punto $P(x,y)$ cualquiera de la hipérbola verifica $d(P,F)-d(P,F')=2a$, sustituyendo en esta expresión las coordenadas respectivas, obtenemos:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

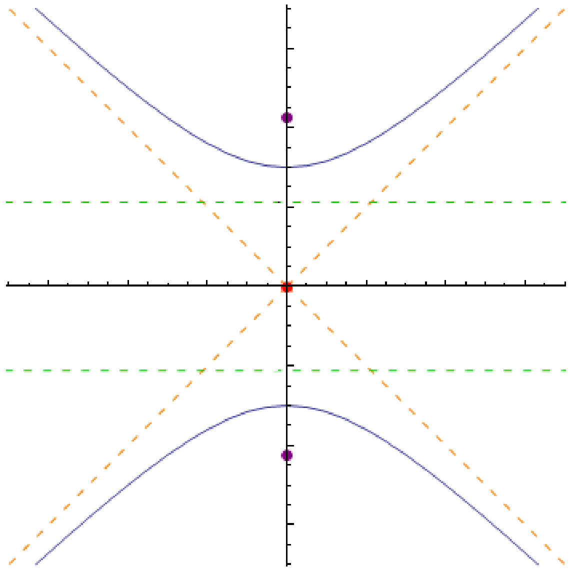
Haciendo las operaciones necesarias para eliminar la raíz cuadrada, y teniendo en cuenta que $c^2=a^2+b^2$, se obtiene que la expresión reducida de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{con } a,b>0$$

En el supuesto de que el eje focal estuviera en el eje de ordenadas, la ecuación sería:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \text{con } a,b>0$$

Y su representación gráfica la se muestra a continuación:



Si el eje focal es la recta $y = y_0$, paralela al eje de abscisas, y el punto medio del mismo es el punto (x_0, y_0), entonces la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

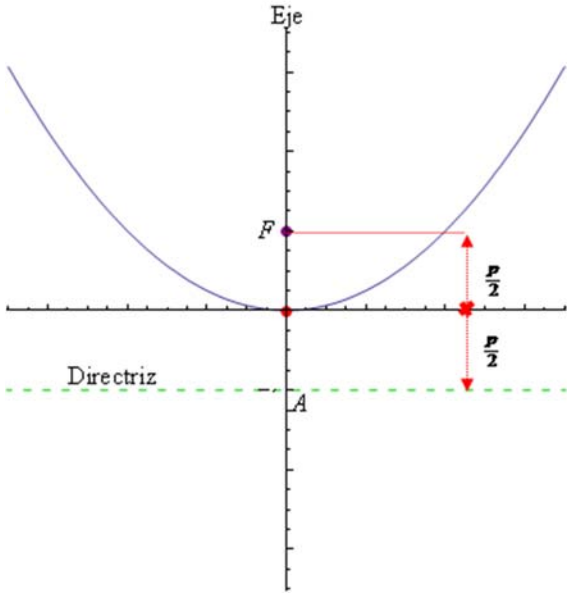
Y, análogamente, si el eje focal es la recta $x = x_0$, paralela al eje de ordenadas, y el punto medio del mismo es el punto (x_0, y_0), entonces la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$$

5.- PARÁBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo *F*, llamado *foco*, y una recta fija *d*, llamada *directriz*, es decir:

$$d(P,F) = d(P,d)$$



- La recta que pasando por el foco es perpendicular a la directriz es el *eje* de la parábola.

- El punto de corte del eje con la parábola se llama *vértice*.

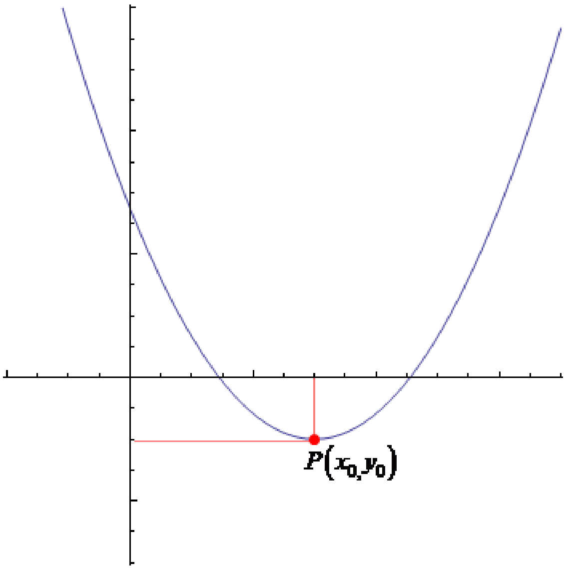
- La distancia desde el foco hasta la directriz se designa con el parámetro *p*.

Para deducir la ecuación de la parábola se considera un sistema de referencia ortonormal donde el vértice coincide con el origen de coordenadas y el eje de la parábola con el eje de ordenadas.

Teniendo en cuenta que un punto $P(x,y)$ cualquiera de la parábola verifica $d(P,F)=d(P,d)$, utilizando las expresiones correspondientes de las distancias, y haciendo las operaciones pertinentes, se llega a la siguiente ecuación reducida de la parábola:

$$x^2 = 2py$$

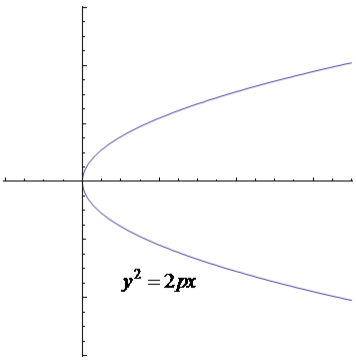
En el caso en que el vértice esté situado en un punto $P_0(x_0,y_0)$, y el eje de la parábola sea paralelo el eje de ordenadas como aparece en el siguiente gráfico

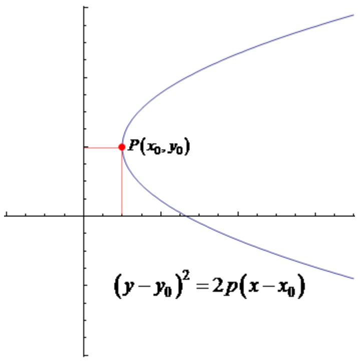


la ecuación correspondiente es:

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0).$$

Por último, cuando el eje de la parábola sea el eje de abscisas o paralelo a él, las gráficas y ecuaciones correspondientes serán las siguientes:





6.- EJERCICOS RESUELTOS

1.- Calcula la ecuación de la circunferencia de centro $C(1,-1)$ y $r=3$.

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

2.- Identifica la curva de ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$.

Como los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales, se trata de una circunferencia. Para identificar cuál es el centro y el radio, agrupamos los términos que contienen la variable x por un lado, y los que contienen la variable y por otro, para intentar completar el cuadrado de un polinomio de primer grado:

$$x^2+y^2+6x-8y+21=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2+(y-4)^2+21-9-16=0$$

Es decir, la ecuación reducida de la circunferencia sería $(x+3)^2+(y-4)^2=4$, de donde se deduce que el centro es el punto (-3,4), y el radio es 2.

3.- Identificar las siguientes curvas:

a) $9x^2+4y^2=36$

b) $3x^2-9y^2=27$

a) Como los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos pero del mismo signo, se trata de una elipse:

$$9x^2+4y^2=36 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9x^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

El centro está en el origen, semieje menor $a=2$ y semieje mayor $b=3$.

b) Como los coeficientes de x^2 e y^2 son de signo contrario, se trata de una hipérbola:

$$\frac{3x^2}{27}-\frac{9y^2}{27}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1.$$

4.- El eje de ordenadas es el eje de una parábola cuyo vértice está en el origen. Calcula la ecuación de la parábola sabiendo que pasa por el punto $(2,4)$.

$$x^2=2py \quad \Rightarrow \quad 2^2=2p\cdot 4 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2=y$$