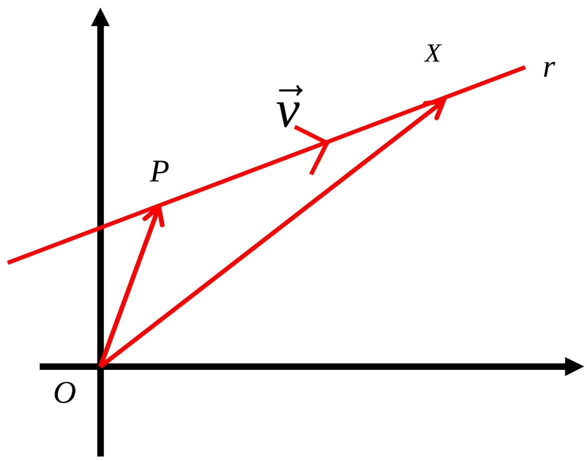
GEOMETRÍA: ESPACIO AFÍN

1.- ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO

1.1.- Ecuación vectorial

Sea $P(a,b)$ un punto de la recta *r*, $\vec{v}=(v_1,v_2)$ un vector, no nulo, que tiene la misma dirección que *r*, y, sea $X\,(x_1,x_2)$ un punto cualquiera de la recta, tal y como se aprecia en el siguiente dibujo:



Como se ve, los puntos P y X de la recta determinan dos vectores, $\vec{P}$ y $\vec{X}$, que son sus vectores de posición.

Dado que el vector $\vec{v}$ y el vector $\overrightarrow{PX}$ tienen la misma dirección, se cumple que $\overrightarrow{PX}=\lambda\cdot\vec{v}$, y, aplicando la suma de vectores: $\vec{X}=\vec{P}+\lambda\cdot\vec{v}$ (1)

A esta ecuación se le llama ***ecuación vectorial*** de la recta, y el vector $\vec{v}=(v_1,v_2)$, es el ***vector director*** de la recta.

1.2.- Ecuaciones paramétricas

Si en la ecuación (1) se sustituyen los vectores por sus coordenadas respectivas:

$$(x,y)=(a,b)+\lambda\cdot(v_1,v_2)=(a+\lambda\cdot v_1,b+\lambda\cdot v_2)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad \begin{cases} x=a+\lambda\cdot v_1 \\ y=b+\lambda\cdot v_2 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

La expresión (2) recibe el nombre de ***ecuaciones paramétricas*** de la recta.

1.3.- Ecuación continua

Despejando λ en la expresión (2):

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{x-a}{v_1} \\ \lambda = \dfrac{y-b}{v_2} \end{cases}$$, e igualando ambas expresiones, se obtiene la ecuación de la recta en

forma continua: $$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} \qquad (3)$$

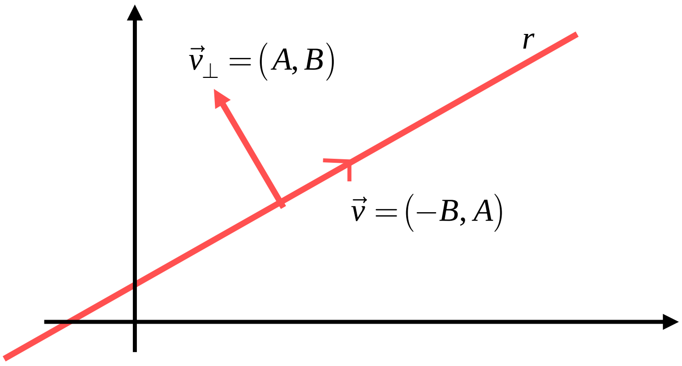
1.4.- Ecuación general

Haciendo operaciones en la ecuación (3), se obtiene la expresión de la recta en forma general o implícita:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4)$$

En esta expresión el vector de componentes $(-B, A)$, y su opuesto, $(B, -A)$, son ***vectores directores*** de la recta.

El vector de componentes (A, B), que es perpendicular a la recta, tal y como se muestra en la figura siguiente, se llama ***vector normal***.



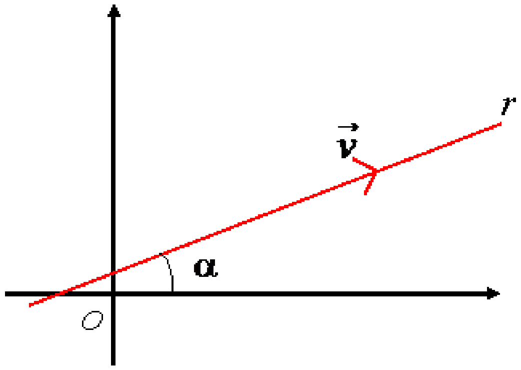
1.5.- Ecuación de la recta punto-pendiente

Si en la ecuación continua de la recta, expresión (3), se multiplican ambos miembros por v_2, la expresión que se obtiene se denomina ***ecuación punto-pendiente***:

$$y - b = \frac{v_2}{v_1}(x - a) \qquad (5)$$

Al cociente $\frac{v_2}{v_1}$ se le llama ***pendiente*** de la recta y se representa por ***m***.

Se define la ***pendiente*** de una recta como la tangente del ángulo α que forma la recta con el semieje positivo de abscisas, OX^+, y que mide la inclinación de la recta tal y como se muestra en el dibujo siguiente:



Por tanto: $\tan \alpha = m = \frac{v_2}{v_1}$, y la ecuación (5) se escribirá:

$$y - b = m(x - a) \qquad (6)$$

1.6.- Posición relativa de dos rectas en el plano

Dadas dos rectas $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$, para saber la posición relativa de ambas se analizará el siguiente sistema:

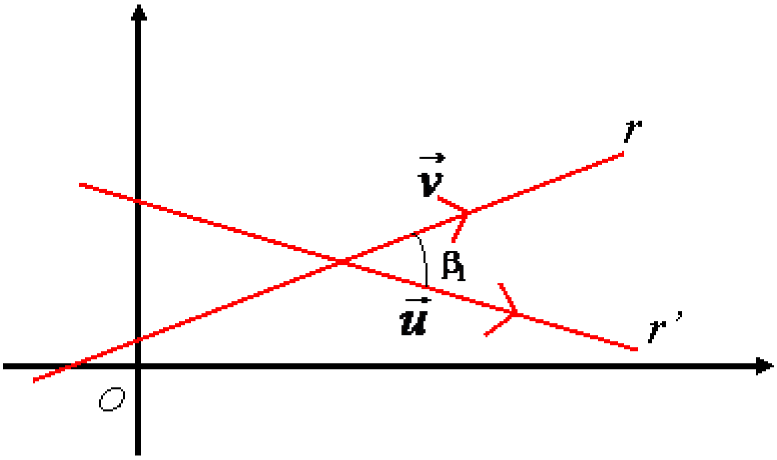
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Al resolverlo se plantean los siguientes casos:

- Solución única, es decir, las rectas son secantes.
- No existe solución, es decir, las rectas son paralelas, y por tanto sus pendientes y vectores directores son iguales, $m = m'$ y $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$
- Existen infinitas soluciones, es decir, las rectas son coincidentes, y por tanto, $m = m'$ y $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

1.7.- Ángulo de dos rectas. Condición de rectas perpendiculares

Dadas dos rectas $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$, se define el ángulo que forman ambas rectas como el menor ángulo que forman sus vectores directores, tal y como se muestra en la figura siguiente:



Para obtener dicho ángulo se utilizará la siguiente expresión: $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$.

Por tanto, si las rectas son perpendiculares, $r \perp s$, como el ángulo que forman ambos vectores es $\dfrac{\pi}{2}$ radianes, y, su coseno es 0, sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow AA'+BB'=0$. Condición que, en función de las pendientes de las rectas (supongamos que estas pendientes son m y m') se expresaría así:

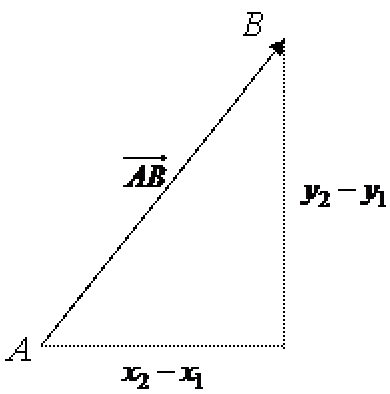
$$r \perp s \quad \Leftrightarrow \quad m'=\frac{-1}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m\cdot m'=-1$$

1.8.- Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, se define la distancia entre ambos como:

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Gráficamente:



2.- ECUACIÓN DE LA RECTA EN EL ESPACIO

Sea $P(a,b,c)$ un punto de la recta *r*, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ un vector, no nulo, que tiene la misma dirección que *r*, y, sea $X\left(x_1,x_2,x_3\right)$ un punto cualquiera de la recta. La *ecuación vectorial de la recta en el espacio* es $\vec{X}=\vec{P}+\lambda\cdot\vec{v}$.

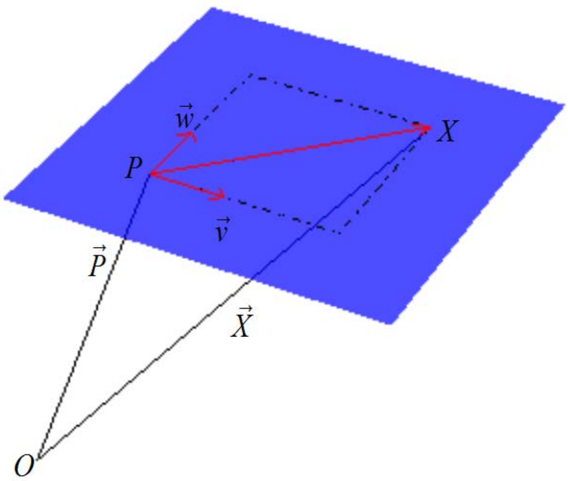
Sustituyendo las coordenadas correspondientes y despejando λ en la expresión anterior:

$\begin{cases} \lambda=\dfrac{x-a}{v_1} \\ \lambda=\dfrac{y-b}{v_2} \\ \lambda=\dfrac{z-c}{v_3} \end{cases}$, e igualando ambas expresiones, se obtiene la ecuación de la recta en *forma continua* en el espacio: $\dfrac{x-a}{v_1}=\dfrac{y-b}{v_2}=\dfrac{z-c}{v_3}$

El vector director $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ puede expresarse también $\vec{v}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, donde α, β y γ son los ángulos que la recta forma con los semiejes OX^+, OY^+ y OZ^+ respectivamente.

3.- ECUACIÓN DEL PLANO

Sea $P(a,b,c)$ un punto del plano π y sean $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ dos vectores independientes paralelos al plano, tal y como se muestra en la figura siguiente:



Dado un punto $X\left(x,y,z\right)$ del plano y llamando al vector $\overrightarrow{OX}=\vec{X}$, la *ecuación vectorial* del plano es:

$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo las coordenadas de los vectores, se deducen las ***ecuaciones paramétricas*** del plano:

$$\begin{cases} x = a + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = b + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = c + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \qquad (7)$$

Para cada valor de los parámetros se obtiene un punto del plano y viceversa, cada punto del plano tiene asociado un único valor de cada parámetro. Teniendo en cuenta esto último, si *X* es un punto del plano, el sistema que constituyen las ecuaciones (7) tiene solución única, es decir el rango de la matriz ampliada asociada a dicho sistema tiene que ser dos. Utilizando el teorema de Rouché, esto implica que:

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x-a \\ v_2 & w_2 & y-b \\ v_3 & w_3 & z-c \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante se obtiene la ***ecuación implícita*** del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

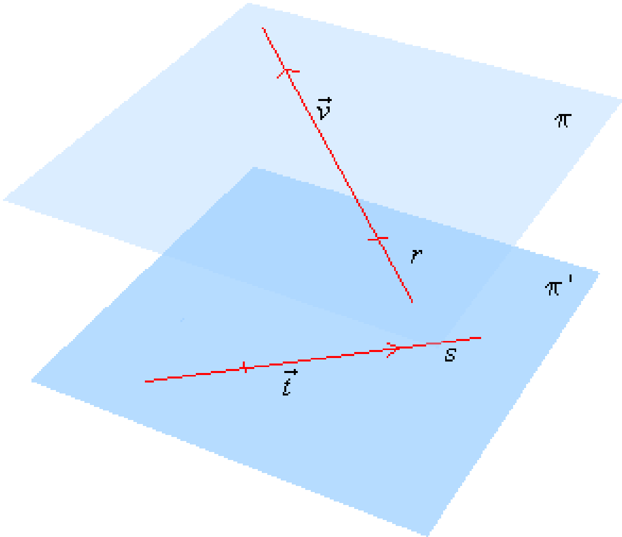
en la cual al vector $\vec{v} = (A, B, C)$ se le denomina ***vector característico*** del plano y es un vector perpendicular a él.

4.- POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

Dadas dos rectas en el espacio de ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x = a + \lambda v_1 \\ y = b + \lambda v_2 \\ z = c + \lambda v_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = a' + \mu t_1 \\ y = b' + \mu t_2 \\ z = c' + \mu t_3 \end{cases}$$

expresadas gráficamente como se aprecia en el siguiente dibujo



para estudiar su posición relativa se analizará, utilizando el teorema de Rouché, la compatibilidad o incompatibilidad del sistema que forman. Así, si

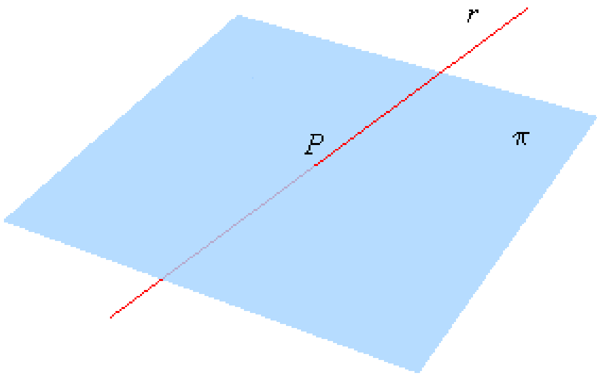
$$M = \begin{pmatrix} v_1 & t_1 \\ v_2 & t_2 \\ v_3 & t_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (M/N) = \left(\begin{array}{cc|c} v_1 & t_1 & a'-a \\ v_2 & t_2 & b'-b \\ v_3 & t_3 & c'-c \end{array}\right)$$

los posibles casos de resolución del sistema se recogen en la siguiente tabla:

rang(M)	*rang(M/N)*	*Sistema*	*Posición relativa*
2	**3**	**Incompatible**	**Se cruzan**
2	**2**	**Compatible determinado**	**Se cortan en un punto**
1	**2**	**Incompatible**	**Son paralelas**
1	**1**	**Compatible indeterminado**	**Coinciden**

5.- POSICIÓN RELATIVA DE UN PLANO Y UNA RECTA

Dado el plano de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = a + \lambda v_1 \\ y = b + \lambda v_2 \\ z = c + \lambda v_3 \end{cases}$, como muestra el siguiente dibujo,



para determinar la posición relativa utilizando el teorema de Rouché se escribe la recta como intersección de dos planos, esto es:

$$r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

Con lo que hay que analizar la compatibilidad o incompatibilidad del sistema en donde las matrices son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (M/N) = \left(\begin{array}{ccc|c} A & A' & A'' & -D \\ B & B' & B'' & -D' \\ C & C' & C'' & -D'' \end{array}\right)$$

Los posibles casos de resolución del sistema se recogen en la siguiente tabla:

rang(M)	***rang(M/N)***	***Sistema***	***Posición relativa***
3	3	Compatible determinado	Se cortan en un punto
2	3	Incompatible	Son paralelos
2	2	Compatible indeterminado	El plano contiene a la recta

6.- EJEMPLOS

1.- Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1,1)$ y . $P_2(2,1)$.

Se calcula un vector director de la recta, por ejemplo: $\overrightarrow{P_1P_2}=(2+1,1-1)=(3,0)$, y se considera un punto cualquiera de la recta, por ejemplo P_1. Las ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=1 \end{cases}$.

2.- Calcular la ecuación implícita de la recta cuya ordenada en el origen vale 3 y que determina un segmento de longitud $\frac{1}{2}$ al cortar el eje de abscisas. ¿Cuál es la pendiente de dicha recta?

Hay que calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(0,3)$ y $P_2\left(\frac{1}{2},0\right)$.

$$\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}=\frac{y-3}{0-3} \Leftrightarrow -3x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 6x+y-3=0.$$

La pendiente de dicha recta es: $m=\frac{-3}{\frac{1}{2}}=-6$.

3.- Dada la recta de ecuación $2x-y+3=0$,

a) Calcular la recta paralela a la dada y que pase por el punto $P(-1,2)$.

b) Calcular la recta perpendicular a la dada y que pase por el punto $P(0,0)$.

La pendiente de la recta dada es $m=2$.

a) Las rectas paralelas tienen la misma pendiente, luego:

$$y-2=2(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 2x-y+4=0$$

b) Las rectas perpendiculares verifican $m'=-\dfrac{1}{m}$. Por lo que la recta pedida es:

$$y=\frac{-1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x+2y=0$$

4.- Calcular el ángulo que forman las rectas de ecuaciones: $r\equiv x-y=0$ y $s\equiv\ x=0$.

Los vectores directores de las rectas dadas son $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{u}=(0,1)$ respectivamente. Aplicando la fórmula vista en el apartado 1.7:

$$\cos\alpha=\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(0,1)\cdot(1,1)}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por lo que $\alpha=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ radianes.

5.- Determinar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $r\equiv 2x+3y-1=0$ y $s\equiv -3x+2y-5=0$.

b) $r\equiv x+y-1=0$ y $s\equiv 2x-y=0$.

a) En este caso las pendientes de las rectas son $m_r=\dfrac{-2}{3}$ y $m_s=\dfrac{3}{2}$, que verifican $m_r\cdot m_s=-1$, es decir, las rectas son perpendiculares.

b) En este caso, como no hay ninguna proporcionalidad entre los coeficientes, las rectas se cortan en un punto, y, para determinarlo se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow y=2x=1-x \quad \Leftrightarrow \quad 3x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2}{3}$$

El punto de corte es $P\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

6.- Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(1,2,1)$ siendo su vector director $\vec{v}=(-1,0,2)$. Expresar dicha recta como intersección de dos planos (forma implícita).

Las ecuaciones paramétricas son $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2 \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$.

Eliminando el parámetro λ: $\begin{cases} \lambda = 1-x \\ \lambda = \dfrac{z-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad 1-x = \dfrac{z-1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x+z-3=0$.

Luego, la ecuación implícita de la recta dada es $\begin{cases} 2x+z-3=0 \\ y=2 \end{cases}$.

7.- a) Calcular la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(-1,0,-1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(1,2,1)$ y $\vec{w}=(1,0,-1)$.

b) Utilizando las ecuaciones paramétricas del plano anterior, estudiar si el punto $Q(0,3,1)$ pertenece a dicho plano.

a) Para calcular la ecuación del plano, expresada en forma implícita, se resuelve el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ 2 & 0 & y \\ 1 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-y+z+2=0$

b) Las ecuaciones paramétricas del plano son $\begin{cases} x = -1+\lambda+\mu \\ y = 2\lambda \\ z = -1+\lambda-\mu \end{cases}$, y para saber si el punto Q pertenece al plano se estudiará si el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 0 = -1+\lambda+\mu \\ 3 = 2\lambda \\ 1 = -1+\lambda-\mu \end{cases}$ es compatible determinado o no. La solución de este sistema es $\lambda = \dfrac{3}{2}$ y $\mu = -\dfrac{1}{2}$, por lo que se deduce que el punto está en el plano.

8.- Determinar la posición relativa de la recta y el plano de ecuaciones respectivas:

$r \equiv \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+2y-3z+4=0 \end{cases}$ y $\pi \equiv x+3y-4z+5=0$.

Para ello se analizará la compatibilidad o incompatibilidad del sistema siguiente:

$$\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+2y-3z+4=0 \\ x+3y-4z+5=0 \end{cases} \Rightarrow (\mathrm{M/N})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 & -5 \end{array}\right)$$

Estudiando el rango de esta matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3-L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De esta última matriz se deduce que el ***rang***(*M*) = 2 = ***rang***(*M/N*) por lo que la recta está contenida en el plano.