MATRICES Y DETERMINANTES

1.- GENERALIDADES

Se llama *matriz de orden m×n* a un conjunto de *m×n* números (o letras que representan números) dispuestos en *m* filas y *n* columnas y encerrado entre paréntesis o corchetes.

$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 2x3

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ es la expresión general de una matriz de orden *m×n*

El conjunto de todas las matrices de orden *mxn* suele denotarse por E_{mxn}.

La matriz suele denotarse con una letra mayúscula. A cada número que va dentro de la matriz se le llama *elemento*. El elemento que está en la fila *i* y la columna *j* se denota con la misma letra que la matriz, pero en minúscula, y dos subíndices que indican la posición del elemento. Por ejemplo, en una matriz A, el elemento de la fila *i* y columna *j* se denota a_{ij} .

En la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ el elemento a_{13} es 5, el elemento a_{23} es 2.

Una matriz suele definirse también a través de sus elementos, de la siguiente manera: A=(a_{ij})$_{m\times n}$. Lo anterior indicaría que tenemos una matriz de orden *m×n*, llamada A y a cuyos elementos llamamos a_{ij}.

Los elementos (números) de una matriz pueden ser reales o complejos. En el primer caso se dice que la matriz es real y en el segundo que es compleja.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz real $\qquad$ $\begin{pmatrix} 2\text{-i} & 0 & 2+i \\ 4 & 2 & 4-i \\ 3 & 1+i & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz compleja

Se dice que dos matrices A y B son *equidimensionales* si y sólo si tienen el mismo número de filas y de columnas.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ son equidimensionales

Se dice que dos matrices A y B son *iguales* si y sólo si, siendo equidimensionales, los elementos que ocupan la misma posición son iguales. Es decir:

$a_{ij} = b_{ij}\ \forall i = 1, 2,...,m \wedge \forall j = 1, 2, ..., n$. (siendo *m* y *n* el número de filas y columnas respectivamente)

Una matriz que tiene todos sus elementos nulos se denomina *matriz nula*, y se representa por $(0)_{mxn}$, siendo *mxn* el orden de la matriz.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de 2x3

Se denomina *matriz línea* a la matriz que consta de una sola línea. Si está formada por una sola fila se llama *matriz fila* (su orden es *1xn*) y si está formada por una sola columna se llama *matriz columna* (su orden es *mx1*).

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz fila $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una matriz columna

Dada una matriz A = $(a_{ij})_{mxn}$, se llama *matriz opuesta de* A a la que se obtiene cambiando el signo de todos los elementos de A. Se representa por −A. Es decir: -A=$(- a_{ij})_{mxn}$.

Si A=$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ -A=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ es la opuesta de A

1.1.- Matrices cuadradas

Se dice que una *matriz* es *cuadrada* si y sólo si tiene el mismo número de filas que de columnas. Así, una matriz cuadrada de orden *n* tiene *n* filas y *n* columnas.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden *n*

Existen definiciones importantes aplicables sólo a matrices cuadradas. Algunas de ellas se exponen a continuación.

Se llama *diagonal principal* de una matriz cuadrada a la formada por los elementos a_{ii} (es decir: $a_{11}, a_{22}, ..., a_{33}$).

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 4 & \boxed{3} & -2 \\ 0 & 2 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$ los elementos encuadrados forman la diagonal principal.

Se llama *traza* de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal principal. Es decir, $Traza(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

En el ejemplo anterior, la traza de la matriz sería: 1+3+2=6

Una matriz cuadrada se dice *triangular superior* si todos los términos situados por debajo de la diagonal principal son ceros (es decir, $a_{ij} = 0 \;\; \forall i > j$). Análogamente, se dice *triangular inferior* si todos los términos situados por encima de la diagonal principal son ceros (es decir, $a_{ij} = 0 \;\; \forall i < j$).

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ es una matriz triangular superior de orden 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ es la forma general de una matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ es la forma general de una matriz triangular inferior

Se llama *matriz diagonal* a toda matriz cuadrada cuyos términos situados fuera de la diagonal principal son nulos (es decir, $a_{ij} = 0 \;\; \forall i \neq j$). Un caso particular de matriz diagonal es la *matriz escalar* en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ son matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a \end{pmatrix}$$

son matrices escalares

Se denomina *matriz unidad* o *matriz identidad* a una matriz escalar en la que los elementos de la diagonal son todos 1. La matriz unidad de orden *n* suele denotarse por I_n.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matriz unidad de orden 3

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}_n$$ matriz unidad de orden *n*

2.- OPERACIONES CON MATRICES

2.1.- Suma de matrices

Dadas dos matrices A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}) del mismo orden *mxn*, se llama *matriz suma* de A y B, y se denota por A+B, a la siguiente matriz:

$$A+B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Es decir, es una matriz cuyos elementos se obtienen sumando uno a uno los elementos que ocupan la misma posición en A y B. La matriz suma es, por lo tanto, una matriz del mismo orden que A y B.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

En general, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \qquad A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

La suma de matrices de orden ***m*x*n*** verifica las siguientes <u>propiedades</u>:

- Asociativa: (A + B) + C = A + (B + C), $\forall$A, B, C
- Elemento neutro: A + $(0)_{mxn}$ = $(0)_{mxn}$ + A = A, $\forall$A
- Elemento opuesto: A + (-A) = (-A) + A = (0), $\forall$A
- Conmutativa: A+B = B+A, $\forall$A, B

Nota: obsérvese que las propiedades de la suma de matrices son las mismas que las de la suma de números reales.

2.2.- Producto de matrices por un escalar

Sea A = (a_{ij}) una matriz de orden ***m*x*n*** y α un número (con frecuencia llamado ***escalar***). Se define el ***producto del escalar*** α ***por la matriz*** A, y se denota por αA, a una matriz cuyos elementos se obtienen multiplicando cada elemento de A por α. La matriz αA es, por lo tanto, una matriz de la misma dimensión que A.

Si $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $\alpha=2 \Rightarrow \qquad \alpha A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 4 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

En general, si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha A=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \dots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \dots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & \dots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$

El producto de matrices de orden ***m*x*n*** por un número verifica las siguientes <u>propiedades</u>:

- $\alpha\times(A + B) = \alpha\times A + \alpha\times B$ $\qquad \forall\, \alpha \wedge \forall$ A, B
- $(\alpha + \beta)\times A = \alpha\times A + \beta\times A$ $\qquad \forall\, \alpha, \beta \wedge \forall$A
- $(\alpha\times\beta)\times A = \alpha\times(\beta\times A)$ $\qquad \forall\, \alpha, \beta \wedge \forall$A
- $1\times A = A$ $\qquad \forall$A

2.3.- Producto de matrices entre sí

Dadas dos matrices A$\in E_{mxp}$ y B$\in E_{pxn}$ (es decir, el número de filas de B coincide con el número de columnas de A), se llama ***matriz producto*** de A y B a otra matriz que se denota como A$\times$B, cuyos elementos se obtienen de la siguiente manera:

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1,2,\ldots,m \wedge j = 1,2,\ldots,n$$

Es decir, si llamamos C a la matriz producto de A×B, entonces:

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} \quad a_{i2} \ldots a_{ip} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}_{m \times p} \cdot \begin{pmatrix} \ldots\ldots b_{1j} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots b_{2j} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots b_{pj} \ldots\ldots \end{pmatrix}_{p \times n} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots c_{ij} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}_{m \times n}$$ donde

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Se observa que la matriz C=A×B es de dimensión ***m*×*n*.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}_{2x1} \quad \begin{cases} c_{11} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -5 \\ c_{21} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = -1 \end{cases}$$

El producto de matrices **no es conmutativo.**

Teniendo en cuenta la definición del producto de matrices, se observa que, como se ha dicho anteriormente, es necesario que el número de filas de B coincida con el número de columnas de A. Por ello, si las matrices son rectangulares es posible que exista A×B y no exista B×A. Pero, aun existiendo B×A, no tiene porqué coincidir con A×B. Si B×A = A×B se dice que las matrices A y B son ***permutables o conmutables.***

Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A×B≠ B×A como se comprueba a continuación:

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Según lo anterior, cuando se multipliquen matrices ha de tenerse cuidado con el orden de los términos. Para distinguir el orden en el producto A×B se dice que A ***premultiplica*** a B o multiplica a B por la izquierda. De la misma manera, B ***postmultiplica*** a A o multiplica a A por la derecha.

Si se quiere multiplicar ambos miembros de una ecuación matricial X = Y por una matriz P, es importante que, o bien premultipliquemos ambos miembros por P, o bien postmultipliquemos ambos miembros por P.

El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

- Distributiva del producto respecto de la suma por la izquierda

  $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C \quad \forall A\in E_{mxn} \wedge \forall B,C\in E_{nxp}$

- Distributiva del producto respecto de la suma por la derecha

  $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C \quad \forall A,B\in E_{mxn} \wedge \forall C\in E_{nxp}$

- Asociativa

  $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) \qquad \forall A\in E_{mxn}, B\in E_{nxp}, C\in E_{pxq}$

  $\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B) \qquad \forall A\in E_{mxn}, B\in E_{nxp}, \forall\alpha$ (número)

En el producto matricial puede ocurrir que $A\cdot B$ sea nulo siendo $A\neq(0)$ y $B\neq(0)$ (a diferencia del producto con escalares donde $a\cdot b=0$ si y sólo si alguno de los factores es cero).

De la misma manera, siendo $A\neq(0)$ la igualdad matricial $A\cdot B=A\cdot C$ no implica $B=C$ (mientras que con escalares, si $a\cdot b=a\cdot c$ y $a\neq 0 \Rightarrow b=c$).

Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sean $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; $A\cdot B=A\cdot C$ con $A\neq(0)$ y $B\neq C$

Es fácil comprobar que $\forall A\in E_{mxn}$, $I_m\cdot A=A$ y $A\cdot I_n=A$ (es decir, las matrices I_m y I_n juegan el mismo papel que el número 1 en la multiplicación de números).

2.4.- Potencias de matrices cuadradas

Las potencias de matrices cuadradas son un caso particular del producto de matrices. Se llama ***potencia p-ésima*** ($p\in\mathbb{R}^+$) de una matriz cuadrada A a la matriz que se obtiene multiplicando A ***p*** veces por sí misma.

$$A^p = \underbrace{(A\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A)}_{p\text{ veces}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^2 &= A\cdot A \\ A^3 &= A\cdot A\cdot A \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se observa fácilmente que esta operación no puede realizarse con matrices rectangulares.

<u>Propiedades</u>:

- $A^pA^q = A^{p+q} \qquad \forall p,q \in \mathbb{R}^+$
- $(A^p)^q = A^{pq} \qquad \forall p,q \in \mathbb{R}^+$

Nota: $A^0 = I \qquad \forall A$ cuadrada, por convenio.

A pesar de que, como hemos dicho, el producto de matrices en general no es conmutativo, es interesante darse cuenta de que cuando multiplicamos dos matrices, donde cada una de ellas es una potencia entera positiva de otra, el orden en que las multipliquemos es indiferente (es decir, estas matrices conmutan).

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\qquad A^2A^3 = \begin{pmatrix} 97 & -142 \\ 213 & 26 \end{pmatrix} \qquad A^3A^2 = \begin{pmatrix} 97 & -142 \\ 213 & 26 \end{pmatrix}$

Es sencillo demostrar que la afirmación anterior se cumple en general:

$$A^pA^q = A^{p+q} = A^{q+p} = A^qA^p \qquad \forall p,q \in \mathbb{R}^+$$

Podría pensarse que las potencias de matrices cuadradas funcionan a todos los efectos como las potencias de números. Pero esto no es cierto:

Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden,

$\mathbf{(A+B)^2} = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2 \neq \mathbf{A^2 + 2AB + B^2}$

pues en general $AB \neq BA$.

Del mismo modo:

$\mathbf{(A+B)(A-B)} = A^2 + BA - AB - B^2 \neq \mathbf{A^2 - B^2}$

3.- MATRIZ TRASPUESTA DE UNA DADA

Se llama *matriz traspuesta* de una matriz A a la que se obtiene intercambiando sus filas por sus columnas. Se representa por A^t o A'. Por lo tanto, si $A \in E_{mxn} \Rightarrow A^t \in E_{nxm}$ (si A es de orden *mxn* su traspuesta es de orden *nxm*)

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t{}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- $(A^t)^t = A \quad \forall A \in E_{mxn}$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^t\right)^t=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$

- $(A+B)^t = A^t+B^t \quad \forall A,B \in E_{mxn}$. En general: $(A_1+A_2+\ldots+A_n)^t=A_1^t+A_2^t+\ldots+A_n^t$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$$A^t=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix} \quad B^t=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t+B^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A+B)^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=A^t+B^t$$

- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \quad \forall A \in E_{mxq}, \forall B \in E_{qxn}$ En general: $(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^t = A_n^t \cdot A_{n-1}^t \cdot \ldots \cdot A_1^t$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-8 & 4\\ -7 & 5\end{pmatrix}$

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad B^t=\begin{pmatrix}-8 & -7\\ 4 & 5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}-22 & -4 & -23\\ 14 & 8 & 13\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-22 & 14\\ -4 & 8\\ -23 & 13\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}-22 & -4 & -23\\ 14 & 8 & 13\end{pmatrix}=B^t\cdot A^t$$

Una matriz cuadrada se dice que es *simétrica* si coincide con su traspuesta, lo cual sólo se puede cumplir si los elementos dispuestos simétricamente a ambos lados de la diagonal principal son iguales. Es decir:

$$A \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A=A^t \Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji} \quad \forall i,j=1,2,\ldots,n$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 6 & 4\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix} \text{ es simétrica}$$

Una matriz cuadrada A se dice que es ***antisimétrica*** si coincide con la opuesta de su traspuesta, lo cual sólo puede ocurrir si los elementos dispuestos simétricamente a ambos lados de la diagonal principal son opuestos y los elementos de la diagonal principal son nulos; es decir

A es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $A=-A^t$ $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall\, i,j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ es antisimétrica}$$

4.- DETERMINANTES DE MATRICES CUADRADAS

4.1.- Definición de determinante

Asociado a cada matriz cuadrada A existe un número que es el valor del ***determinante*** y se denota por |A|. La expresión matemática de la definición de determinante puede parecer y, de hecho, es complicada, pero su significado es muy sencillo. Es interesante observar esta definición para darse cuenta del coste que supondría emplearla en matrices de orden elevado y comprender así porqué se buscan modos alternativos de obtener el valor de un determinante y la necesidad de conocer las propiedades de los determinantes para emplear estos métodos. (NOTA: los alumnos y alumnas tinen a su disposición, entre el material de este curso, un documento con la definición matemática del determinante. Lo consideramos de estudio opcional).

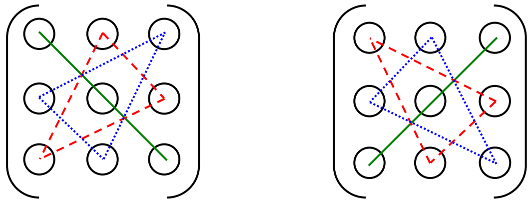
Precisamente de la aplicación directa de la definición de determinante se obtienen las fórmulas para su cálculo cuando éstos son de orden 2 y 3, fórmulas éstas que es seguro que el alumnado conoce y aplica habitualmente, si bien estos determinantes pueden calcularse también por los métodos que se van a explicar posteriormente, válidos para matrices de cualquier orden. Recordamos dichas ***fórmulas***:

Orden 2: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Orden 3: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$

$$-a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Es más sencillo recordar esta última expresión haciendo uso de la ***regla de Sarrus***, que "dibuja" esta fórmula mediante un esquema que agrupa los términos que van en cada sumando. En el dibujo de la regla de Sarrus que se muestra a continuación, los círculos representan los elementos de la matriz; se han unido con líneas de un mismo color los elementos que van multiplicados en un mismo sumando (a la izquierda los positivos y a la derecha los negativos).



Términos positivos   Términos negativos

4.2.- Otras definiciones relacionadas con los determinantes

Para los métodos de cálculo de determinantes que se van a presentar posteriormente es necesario definir algunos conceptos previos.

Si en un determinante D de orden *n* se suprimen *q* filas y *q* columnas, las restantes filas y columnas definen un nuevo determinante de orden (*n*-*q*) que se llama *menor del determinante* D.

Si en $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$ se suprimen las filas 3 y 5, y las columnas 2 y 4, se obtiene

el menor de orden 3 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$

A cada elemento a_{ij} de un determinante D se le puede asociar un determinante, que se obtiene suprimiendo en D la fila i y la columna j en las que se encuentra el elemento. Este nuevo determinante se denomina *menor asociado a* a_{ij}, y que se denota por D_{ij}. Se observa fácilmente que, si D es de orden *n*, D_{ij} es de orden *n -1*.

Si en el determinante anterior buscamos D_{12}: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$ es el menor asociado al elemento a_{12}.

Cuando un menor de un determinante está formado por las q primeras filas y las q primeras columnas se denomina ***menor principal de orden q***.

Así, por ejemplo, en un determinante de orden 5 para obtener sus menores principales de orden 1, 2, 3, 4 y 5 (el propio determinante) vamos seleccionando los elementos (o filas y columnas) como se indica a continuación:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$ resultando así:

$$|a_{11}| \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$ y el propio determinante.

Se llama ***adjunto*** de un elemento a_{ij} al determinante $A_{ij}=(-1)^{i+j}\times D_{ij}$. Es decir, al valor del menor correspondiente a a_{ij} con signo + o -, según el lugar que ocupa a_{ij}.

Así, para el determinante de orden 5 de los ejemplos anteriores:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\times D_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{23} & a_{25} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

4.3.- Propiedades de los determinantes

Para calcular los determinantes por los métodos que se van a exponer posteriormente convendrá realizar una serie de transformaciones que no alteren su valor, pero que lo conviertan en otro más sencillo de calcular (por ejemplo, por tener muchos elementos nulos o ser triangular).

Para realizar dichas transformaciones deben tenerse en cuenta siempre las propiedades de los determinantes (no vamos a demostrar ninguna de ellas a pesar de que algunas demostraciones son muy sencillas):

1. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A|=|A|^t$
2. Si una fila (o columna) tiene todos sus elementos nulos, el valor del determinante es cero.
3. Un determinante que tiene dos filas (o dos columnas) iguales es nulo.

4. Si en un determinante los elementos de una fila o columna son múltiplos de los de otra, el valor del determinante es cero.

5. Un determinante en el cual una fila (o columna) es combinación lineal de otra es nulo.

6. Si a una fila (o columna) se le suma otra multiplicada por un escalar, el determinante no varía.

7. Si se cambian entre sí dos filas, el valor del determinante cambia de signo (análogamente con las columnas).

8. Multiplicando todos los elementos de una fila (o columna) por α, el determinante queda multiplicado por α.

9. Sea el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En general: Si todos los elementos de una fila (o columna) de un determinante son sumas de p números, se puede descomponer dicho determinante en suma de p determinantes que tienen comunes todas las filas (o columnas) excepto la considerada, la cual viene sustituida por el primer sumando en el primer determinante, por el segundo sumando en el segundo determinante,..., por el p-ésimo sumando en el p-ésimo determinante.

10. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. $\forall A,B \in E_{nxn}$.

11. $|A^p|=|A|^p$ $\forall A \in E_{nxn}$.

Nota: en general $|A+B| \neq |A| + |B|$

4.4.- Algunos métodos de cálculo de determinantes

4.4.1.- Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (o regla de Laplace)

El valor de un determinante D se puede calcular como la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por los adjuntos de los mismos (para reducir el número de operaciones a realizar será conveniente elegir la línea que tenga mayor número de elementos nulos).

Así, si $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, desarrollando el determinante por la i-ésima fila se obtiene:

$$D = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in}$$

Y haciéndolo por la j-ésima columna, se obtiene:

$$D = a_{1j}\cdot A_{1j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj}\cdot A_{nj}$$

<u>Ejemplo</u>: Calculemos $\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \leftarrow 2 \text{ elementos nulos}$

Desarrollando D por los elementos de la cuarta fila:

$$\mathrm{D} = -0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -66$$

En el ejemplo anterior, el cálculo del determinante de orden 4 se ha transformado en el cálculo de 4 determinantes de orden 3 (que podemos obtener haciendo uso de la regla de Sarrus, por ejemplo), dos de los cuales no calcularemos por ir multiplicados por cero. El cálculo de un determinante de orden *n* se transforma con este método en el cálculo de *n* determinantes de orden *n -1* (o alguno menos si en la línea por la que desarrollamos hay ceros). Por ello, este método en sí mismo, sin combinarlo con el uso de las propiedades de los determinantes, no es de gran utilidad para el cálculo de determinantes de orden elevado.

4.4.2.- Cálculo empleando las propiedades de los determinantes

Todas las propiedades de los determinantes son muy útiles para el cálculo de los mismos. Siempre será conveniente observar si tenemos un determinante con todos sus elementos nulos, o con dos líneas paralelas (filas o columnas) iguales entre sí o proporcionales, o si una fila es combinación lineal de otras (esto último no es tan fácil de ver por simple observación). En estos casos, por las propiedades 2, 3, 4 y 5 sabríamos que el valor del determinante es cero, sin necesidad de calcularlo. De no ser así, se suele intentar transformar el determinante en otro más sencillo (generalmente triangular) haciendo uso con frecuencia de las propiedades 7, 8 y, sobre todo, 6.

Hay que tener mucho cuidado en el empleo de las propiedades 7 y 8, ya que alteran el valor del determinante original, por lo que hay que multiplicar posteriormente el valor obtenido por el número adecuado (-1 o $\frac{1}{\alpha}$, respectivamente) para mantener el valor del determinante inicial.

5.- RANGO DE UNA MATRIZ DE ORDEN mxn

5.1.- Definición

Se llama *rango* de una matriz A de orden *mxn* al orden del mayor menor no nulo que puede extraerse de ella. También, teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes, se define como el mayor número de filas o columnas que son linealmente independientes en A.

5.2.- Cálculo

El primer procedimiento que nos puede venir a la mente para calcular el rango de una matriz es emplear directamente su definición. Así, dada una matriz de orden *mxn* comenzaremos extrayendo uno a uno sus menores de mayor orden (supongamos que éste es *n*). En cuanto algún menor sea no nulo pararemos el proceso y diremos que el rango de la matriz será *n*. Si extraídos todos los menores de orden *n* no hemos encontrado ninguno no nulo, sabremos que el rango es menor que *n*, pero no sabremos cuánto menor. En este último caso tendríamos que continuar el proceso, extrayendo uno a uno los menores de orden *n-1* hasta que encontremos uno no nulo, momento en el que podríamos decir que el rango de A es *n-1*. Si extraídos todos los menores de orden *n-1* no hemos encontrado ninguno no nulo, sabremos que el rango es menor que *n-1*, pero no sabremos cuánto menor. Así, tendríamos que pasar a plantear los menores de orden *n*-2 ... Se continúa con el proceso hasta obtener algún menor no nulo de algún orden; el rango de la matriz sería este orden.

Puede verse que este proceso es muy laborioso, por lo que si hay algún procedimiento alternativo es conveniente emplearlo. Uno de estos procedimientos, mucho más eficiente y comúnmente empleado en la práctica, se muestra en la teoría correspondiente a sistemas de ecuaciones lineales al explicar cómo se discute la existencia de solución de este tipo de sistemas cuando aplicamos el método de Gauss.

6.- MATRICES REGULARES: INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

6.1.- Definición

Una matriz cuadrada A se dice *regular* si existe otra matriz cuadrada, a la que llamaremos *inversa* de A y denotaremos por A^{-1}, tal que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$. En caso de no existir esta matriz A^{-1} se dice que A es *singular*.

La inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ya que $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Podemos decir entonces que A es regular, ya que tiene inversa.

Cuando una matriz cuadrada tiene inversa, ésta es única.

Cuando la inversa de una matriz A coincide con su traspuesta, se dice que A es ***ortogonal***. Es decir:

$$\text{A es ortogonal} \Leftrightarrow A^{-1}=A^t \Leftrightarrow A^t \cdot A = A \cdot A^t = I$$

6.2.- Caracterización de las matrices regulares (cómo saber si una matriz es regular)

Un primer método para saber si una matriz es regular sería utilizar directamente la definición: dada una matriz A planteamos la ecuación matricial $A \cdot A^{-1}=I$. Si este sistema tiene solución, la matriz A^{-1} obtenida será la inversa de A y A será regular; si el sistema es incompatible significa que no se puede encontrar A^{-1} y por lo tanto A es singular. Veremos un ejemplo de esto en el siguiente apartado (cálculo de la inversa).

Pero, además, puede demostrarse que una matriz cuadrada es ***regular*** si y sólo si su determinante es no nulo. De la misma manera, una matriz cuadrada es ***singular*** si y sólo si su determinante es nulo. Recordando la definición de rango de una matriz, lo anterior es equivalente a decir que una matriz cuadrada de orden ***n*** es regular si y sólo si el rango de A es ***n***, y es singular si el rango de A es menor que ***n***.

6.3.- Algunos métodos para calcular la inversa de una matriz

6.3.1.- Utilizando directamente la definición de inversa

Como se ha indicado en el apartado anterior, el método más directo para calcular la inversa de una matriz A sería aplicar directamente su definición. Ésta representa un sistema de ecuaciones a partir del cual podremos obtener A^{-1}, en caso de existir.

Por ejemplo, para calcular la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ planteamos que buscamos una matriz A^{-1} que, en caso de existir, ha de ser también cuadrada de orden 2, por lo que será de la forma $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, y ha de cumplir $A \cdot A^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esta expresión representa la igualdad de dos matrices y, puesto que para que dos matrices sean iguales han de serlo elemento a elemento (según la definición de igualdad de matrices), de aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2t=0 \\ 2x+z=0 \\ 2y+t=1 \end{cases}$$

La discusión de la existencia de solución de este sistema y su resolución se abordarán por cualquier método conocido. En este ejemplo, el sistema tiene solución y es la siguiente:

$x=-\frac{1}{3},\quad y=\frac{2}{3},\quad z=\frac{2}{3},\quad t=-\frac{1}{3}$. Por lo tanto, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

En caso de que la matriz cuya inversa buscamos no sea regular, llegaremos a un sistema incompatible (es decir, sin solución). Por ejemplo:

Si $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$A\cdot A^{-1}=I \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x+8z=1\\ 2y+8t=0\\ x+4z=0\\ y+4t=1\end{cases}$ este sistema no tiene solución

(no existen valores de *x,y,z,t* que cumplan todas las ecuaciones simultáneamente). Por lo tanto, no existe una matriz A^{-1}/ $A{\times}A^{-1}=I$ (es decir, A es singular).

6.3.2.- Cálculo de A^{-1} empleando la fórmula: $\boxed{\mathbf{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{a}}}$

Se puede demostrar que si A es regular, su inversa se puede calcular según la expresión anterior, donde A^a denota a la matriz adjunta de A y es aquella matriz que resulta de sustituir cada elemento de A^t por su adjunto.

Para calcular la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ necesitamos su determinante:

$$|A|=1\cdot3\cdot3+1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot(-1)-1\cdot3\cdot(-1)-1\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot3=4\neq0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

y su adjunta:

$$A^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow A^a=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -4 & 4\\ -5 & 4 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Entonces, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5/4 & 1 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

6.4.- Algunas propiedades

- $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$ $\forall$A regular$\in E_{nxn}$.
- $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$ $\forall$A,B regulares$\in E_{nxn}$