ÁLGEBRA ELEMENTAL

1.- EXPRESIONES ALGEBRAICAS (GENERALIDADES)

1.1.- Algunas definiciones

Una ***expresión algebraica*** es una expresión matemática que contiene números y letras que representan números cualesquiera, y signos matemáticos que indican operaciones a efectuar con los números (suma, resta ...).

$3xy+\dfrac{z}{y-x^2}$ $\qquad x^2+2x+1$ $\qquad$ son expresiones algebraicas

Un ***término*** es una expresión algebraica que sólo contiene productos y cocientes (es decir, no aparecen sumas o restas).

$3xy-x^3+\dfrac{2}{y}$ es una expresión algebraica que consta de 3 términos: $3xy,\ -x^3,\ \dfrac{2}{y}$.

Si una expresión algebraica consta de un solo término recibe el nombre de ***monomio***, si está compuesta de 2 términos se denomina ***binomio***, de tres términos es un ***trinomio***, y, en general, se llama ***multinomio*** a toda expresión algebraica de más de un término.

$3xy^3$ es un monomio

$3xy-\dfrac{2}{y}$ es un binomio

$3xy-x^3+2$ es un trinomio

Un ***factor*** es cada uno de los elementos de un término.

El término $3xy^3$ tiene 3 factores: $3,\ x,\ y^3$

En un término se dice que cualquier factor es ***coeficiente*** de los restantes. Así, por ejemplo, en el término $3xy^3$,

3 es el coeficiente de xy^3

x es el coeficiente de $3y^3$

y^3 es el coeficiente de $3x$

En el ejemplo anterior, al número 3 se le llama ***coeficiente numérico*** (o simplemente, coeficiente) del término. El coeficiente numérico se define en general como el número que multiplica a las letras en una expresión algebraica. Cuando el coeficiente es la unidad no suele escribirse explícitamente.

Se dice que dos ***términos*** son ***semejantes*** cuando sólo se diferencian en su coeficiente numérico.

$2xy^5$ y $7xy^5$ son semejantes entre sí.

$\dfrac{x^2}{y^3}$ y $\dfrac{5x^2}{y^3}$ son semejantes entre sí.

Un ***término*** es ***racional y entero*** con respecto a ciertas letras (que representan a números cualesquiera) si está formado por potencias enteras y positivas de letras multiplicadas por un factor numérico, o bien está formado sólo por un número. Se llama ***grado del término*** a la suma de los exponentes.

$3xy^3$ es un término racional entero de grado 4

$3x^4$ es un término racional entero de grado 4

3 es un término racional entero de grado 0

$3x$ es un término racional entero de grado 1

Una expresión racional entera es una expresión que consta de varios términos, cada uno de los cuales es racional y entero. Las expresiones racionales enteras se llaman también ***polinomios. S***e llama ***grado de la expresión*** (***o del polinomio***) al grado del término de mayor grado.

$5xy^3 + 4x^2z^5 - 2xyz$ es un polinomio de grado 7

1.2.- Operaciones básicas con expresiones algebraicas

La ***suma*** de expresiones algebraicas se realiza agrupando los términos semejantes y sumando los coeficientes.

Así, la suma de $3xy^3 + yz^2 + xyz$ y $xy^3 + 2yz^2 + 5xyz$

da como resultado $4xy^3 + 3yz^2 + 6xyz$

La ***resta d***e expresiones algebraicas se realiza sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.

Así, la resta de $3xy^3 + yz^2 + xyz$ y $xy^3 + 2yz^2 + 5xyz$

da como resultado $2xy^3 - yz^2 - 4xyz$

Multiplicación de dos o más monomios. Se realiza aplicando las propiedades asociativa y conmutativa del producto de números y las reglas de la potenciación y de los signos (ha de tenerse en cuenta que todos los factores de un monomio son o representan números).

El producto de $4x^2z$ por $3y^3z^2$ da como resultado $12x^2y^3z^3$

El producto de: $\frac{3x^2}{y}$ por $2y^3z^2$ y por $4x$ da como resultado $24x^3y^2z^2$

Multiplicación de dos multinomios. Se realiza multiplicando todos y cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro, sumando los productos obtenidos.

$$\left(\frac{2xy^2}{z}+5xz^2+2xyz\right).\left(3xy^3-\frac{2}{z}\right)=$$

$$\left(\frac{2xy^2}{z}+5xz^2+2xyz\right).\left(3xy^3\right)+\left(\frac{2xy^2}{z}+5xz^2+2xyz\right).\left(-\frac{2}{z}\right)=$$

$$\left(\frac{2xy^2}{z}\right).\left(3xy^3\right)+\left(5xz^2\right).\left(3xy^3\right)+\left(2xyz\right).\left(3xy^3\right)+\left(\frac{2xy^2}{z}\right).\left(-\frac{2}{z}\right)+\left(5xz^2\right).\left(-\frac{2}{z}\right)+\left(2xyz\right).\left(-\frac{2}{z}\right)=$$

$$\frac{2x^2y^5}{z}+5x^2y^3z^2+6x^2y^4z-\frac{4xy^2}{z^2}-10xz-4xy$$

División de dos monomios. Se realiza hallando el cociente de los coeficientes y los factores literales (letras), multiplicando después dichos cocientes.

$$\frac{12x^2y^3}{2xy}=6xy^2$$

$$\frac{5xy^3z}{2x^2y}=\frac{5}{2}.\frac{1}{x}.y^2.z=\frac{5y^2z}{2x}$$

División de dos multinomios. En este caso, nos limitaremos al caso de división de dos polinomios. Para dividir dos polinomios se realizan los siguientes pasos:

1º Se ordenan los términos de ambos polinomios según las potencias decrecientes (o crecientes) de una de las letras comunes a los dos polinomios.

2º Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, resultando así el primer término del cociente

3º Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y se resta del dividendo, obteniéndose un resto.

4º Considerando el resto obtenido como nuevo dividendo se repiten las operaciones 2ª y 3ª tantas veces como sea necesario hasta que se obtenga un resto igual a cero o de grado menor que el del divisor.

5º El resultado de la división puede escribirse como:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

1.3.- Factorización de expresiones algebraicas

Factorizar una expresión algebraica significa encontrar dos o más expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí den lugar a la primera. Ejemplo:

$$x^2 - xy - 2y^2 = (x-2y)\cdot(x+y)$$

Son muchas las ***técnicas útiles*** en el proceso de descomponer en factores una expresión algebraica, como por ejemplo el conocimiento de las formulas del cuadrado perfecto, cubo perfecto, diferencia de cuadrados, propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números, etc. Algunas de estas fórmulas se exponen a continuación:

$ac + ad = a\cdot(c+d)$	monomio factor común
$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$	suma por diferencia
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	cuadrado perfecto
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$	cuadrado perfecto
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$	
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$	
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$	

NOTA: una fórmula muy interesante, aunque su principal aplicación no es factorizar expresiones algebraicas, es el llamado ***binomio de Newton***:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}\cdot a\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot b^n}$$

donde la expresión $\binom{n}{m}$ se llama ***número combinatorio***, se lee "***n*** sobre ***m***" y equivale a lo siguiente:

$$\forall n,m \in N,\quad \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} \overset{\substack{simplificando\\ tras\ desarrollar\ los\ factoriales}}{\overset{(1)}{=}} \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$$

(1) ha de recordarse que el factorial de un número natural n, se define como:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1$$

Además, por convenio, $0! = 1$, por lo tanto, $\binom{n}{0} = 1$

Ejemplo:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}\cdot a^4 + \binom{4}{1}\cdot a^{4-1}\cdot b + \binom{4}{2}\cdot a^{4-2}\cdot b^2 + \binom{4}{3}\cdot a^{4-3}\cdot b^3 + \binom{4}{4}\cdot a^{4-4}\cdot b^4 =$$
$$= \frac{4!}{0!\cdot(4-0)!}\cdot a^4 + \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!}\cdot a^3\cdot b + \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot a^2\cdot b^2 + \frac{4!}{3!\cdot(4-3)!}\cdot a\cdot b^3 + \frac{4!}{4!\cdot(4-4)!}\cdot b^4 =$$
$$= a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a\cdot b^3 + b^4$$

Nota: ver también factorización de polinomios (apartado 2.4).

1.4.- Fracciones algebraicas y su simplificación

Se llama expresión algebraica racional o *fracción algebraica* al cociente de dos polinomios. La expresión algebraica racional tiene dos *términos*: el numerador y el denominador.

$$\frac{x^3 - 2y + 8}{xy - y^2} \quad \text{es una fracción algebraica}$$

Las reglas para *sumar, restar, multiplicar* y *dividir fracciones algebraicas* son las mismas que las de las correspondientes operaciones con fracciones en aritmética.

Fracciones equivalentes son aquéllas cuyo valor es el mismo. Si se multiplican el numerador y el denominador de una fracción algebraica por una misma cantidad no nula (esta cantidad puede venir dada por otra expresión algebraica) resulta una fracción algebraica equivalente a la inicial.

$\frac{4x+8}{3x}$ y $\frac{8x+16}{6x}$ son equivalentes.

$\frac{4x+8}{3x}$ y $\frac{8x^2+16x}{6x^2}$ (con $x \neq 0$) son equivalentes.

Nótese que si $\frac{p(x)}{q(x)}$ es equivalente a $\frac{r(x)}{s(x)}$ entonces se cumple que $p(x)\cdot s(x) = q(x)\cdot r(x)$

Simplificar una fracción algebraica es transformarla en otra equivalente e irreducible (es decir que el numerador y el denominador no tengan más factores en común que la unidad). Para ello, se factorizan numerador y denominador y se eliminan los factores comunes (siempre que éstos sean distintos de cero). Ejemplo:

$$\frac{x^2-xy-2y^2}{x^2-y^2}=\frac{\cancel{(x+y)}\cdot(x-2y)}{\cancel{(x+y)}\cdot(x-y)}=\frac{(x-2y)}{(x-y)}$$

2.- POLINOMIOS REALES DE UNA VARIABLE

2.1.- Generalidades

En el apartado 1.1 hemos definido qué es un polinomio. En el caso particular en el que aparezca una sola letra (o variable) y tanto los coeficientes como la variable sean números reales, se dice que el *polinomio* es *real de una variable*. Así, mientras que

$5xy^3-7xyz+z^3+8$ es un ejemplo de polinomio cualquiera

$8+5x+14x^2$ es un polinomio de una variable

La *expresión general* de un polinomio real de una variable es de la forma:

$$p(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

donde $a_o,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,x\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas en el apartado 1.1 para expresiones algebraicas en general, podemos decir que para un polinomio real de una variable:

los números $a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ son los *coeficientes* del polinomio

cada sumando de la forma a_ix^i se denomina *término* de grado *i*

el *grado* del polinomio será el grado (o exponente) del término de mayor grado.

$8+5x+14x^2$ es un polinomio de grado 2, y tiene tres términos cuyos coeficientes son 8, 5 y 14.

El coeficiente a_o se llama *término independiente*.

El término independiente del polinomio $2-3x+7x^2-x^3$ es 2

Polinomio completo es aquél en el que todos sus coeficientes son no nulos:

$-3+\frac{4}{5}x-2x^2$ es un polinomio completo de grado 2

$-1+14x^2+8x^3$ es un polinomio de grado 3 no completo (falta el término de grado 1)

Polinomio nulo es aquél en el que todos sus coeficientes son nulos; se denota por 0(*x*):

$0+0x+0x^2$ es el polinomio nulo de grado 2.

Polinomio opuesto de un polinomio ***p***(*x*) dado es aquél cuyos coeficientes son los opuestos del original. Se denota por −***p***(*x*):

El polinomio opuesto de $2-x+3x^2$ es $-2+x-3x^2$

Se llama ***valor numérico*** de un polinomio ***en*** $x=a$ y se denota por $p(a)$, al número real que se obtiene al sustituir la variable *x* por el número *a*:

El valor numérico de $p(x)=2-x+3x^2$ en $x=2$ es $p(2)=2-2+3\cdot 2^2=12$

Nota: el polinomio nulo toma valor 0 en todo *x*.

Dos ***polinomios*** son ***iguales*** cuando toman el mismo valor en todos los puntos. La condición necesaria y suficiente para que dos polinomios sean iguales es que sean iguales entre sí los coeficientes de los términos del mismo grado en ambos polinomios. Es decir:

> los polinomios $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ y
>
> $$q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n$$
>
> son iguales $\Leftrightarrow a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\cdots,\ a_n=b_n$

2.2.- Operaciones básicas

La suma, resta, producto y división de polinomios de una variable se realizan siguiendo las reglas expuestas en el apartado 1.2 para expresiones algebraicas en general. Por lo tanto, en el caso de dos polinomios reales de una variable:

$$p(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n \quad \text{y} \quad q(x)=b_o+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n$$

las operaciones quedan definidas como se expone a continuación.

2.2.1.- Suma y resta

Se llama ***suma*** de ***p***(*x*) y ***q***(*x*) a un polinomio (llamémosle ***s***(*x*)), tal que:

$$s(x)=p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3+\cdots+(a_n+b_n)x^n$$

Ha de tenerse en cuenta que, para poder sumar dos polinomios, no han de ser necesariamente del mismo grado ni completos. Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=2+3x-8x^2 \\ q(x)=-1+2x+4x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad s(x)=p(x)+q(x) \ = \ 1+5x-8x^2+4x^4$$

La ***resta*** de dos polinomios ***p***(**x**) y ***q***(**x**) se realiza sumando al primero el opuesto del segundo:

$$p(x)-q(x)=p(x)+\left(-q(x)\right)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+(a_3-b_3)x^3+\cdots+(a_n-b_n)x^n$$

Propiedades de la suma de polinomios:

Conmutativa: $\forall p,q, \quad p(x)+q(x)=q(x)+p(x)$

Asociativa: $\forall p,q,r, \quad p(x)+(q(x)+r(x))=(p(x)+q(x))+r(x)$

Elemento neutro (o nulo): $\forall p, \ \exists q \,/\, p(x)+q(x)=q(x)+p(x)=p(x)$. El elemento neutro, ***q***(**x**), es el polinomio nulo, 0(**x**).

Elemento opuesto: $\forall p, \ \exists q \,/\, p(x)+q(x)=q(x)+p(x)=0(x)$. El elemento opuesto, ***q***(**x**), es el polinomio -***p***(**x**).

2.2.2.- Producto

El producto de dos polinomios se realiza multiplicando todos y cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro, sumando finalmente los productos obtenidos:

$$\begin{aligned} p(x)\cdot q(x) \ &= \ (a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n)= \\ &=a_0\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n)+a_1x\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n)+\ldots+ \\ &\quad +a_nx^n\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots+b_nx^n)= \\ &=(a_0\cdot b_0+a_0\cdot b_1\cdot x+\ldots+a_0\cdot b_n\cdot x^n)+(a_1\cdot b_0\cdot x+a_1\cdot b_1\cdot x^2+\ldots+a_1\cdot b_n\cdot x^{n+1})+\ldots+ \\ &\quad +(a_n\cdot b_0\cdot x^n+a_n\cdot b_1\cdot x^{n+1}+\ldots+a_n\cdot b_n\cdot x^{2n}) \overset{\substack{\text{agrupando términos}\\ \text{del mismo grado}}}{=} \\ &=(a_0\cdot b_0)+(a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0)\cdot x+(a_0\cdot b_2+a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_0)\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot b_n\cdot x^{2n} \end{aligned}$$

Propiedades:

Conmutativa: $\forall p,q, \quad p(x)\cdot q(x)=q(x)\cdot p(x)$

Asociativa: $\forall p,q,r, \quad p(x)\cdot(q(x)\cdot r(x))=(p(x)\cdot q(x))\cdot r(x)$

Elemento neutro (o unitario): $\forall p, \ \exists q \,/\, p(x)\cdot q(x)=q(x)\cdot p(x)=p(x)$. Este elemento neutro es el polinomio 1 (que toma valor constante 1 en todos los puntos).

Además, se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$\forall p,q,r, \quad p(x)\cdot(q(x)+r(x)) = p(x)\cdot q(x) + p(x)\cdot r(x)$$

2.2.3.- Cociente

El proceso para dividir dos polinomios se ha expuesto en el apartado 1.2. Se describe a continuación este proceso para el caso particular de polinomios de una variable:

1º Se ordenan los términos de ambos polinomios según las potencias decrecientes.

2º Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, obteniéndose así el primer término del cociente

3º Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y se resta del dividendo, obteniéndose un resto.

4º Considerando el resto obtenido como nuevo dividendo se repiten las operaciones 2ª y 3ª tantas veces como sea necesario hasta obtener un resto igual a cero o de grado menor que el del dividendo.

5º El resultado de la división puede escribirse como:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

Para el caso particular en el que el divisor es de la forma ***x +a*** o ***x -a,*** la Regla de Ruffini es un método sencillo para realizar la división. Entre la documentación del curso, se encuentran dos presentaciones con sendos ejemplos de división de polinomios, uno de carácter general, y otro con la aplicación del método de Ruffini.

NOTA: Las propiedades de las operaciones con polinomios se basan en las propiedades de las operaciones con números reales.

2.3.- Raíces de un polinomio

2.3.1.- Generalidades

Se dice que un número ***r*** es una ***raíz*** de un polinomio ***p***(x) si el valor numérico del polinomio para $x = r$ es 0. Es decir, $\boxed{r \text{ es raíz de } p(x) \Leftrightarrow p(r) = 0}$

3 es raíz del polinomio $p(x) = -3 + x$ ya que $p(3) = -3 + 3 = 0$

2 es raíz del polinomio $p(x) = -6 + x + x^2$ ya que $p(2) = -6 + 2 + 2^2 = 0$

Si ***p***(x) tiene ***m*** raíces iguales a ***r***, se dice que ***r*** es una ***raíz múltiple*** de orden ***m***. Si ***m*** toma el valor 2, diremos que ***r*** es una raíz doble; si ***m*** toma el valor 3, diremos que ***r*** es una raíz triple; y así sucesivamente.

-2 es raíz doble de $p(x) = 4 + 4x + x^2$ ya que $p(x) = 4 + 4x + x^2 = (x+2)^2 = (x+2)(x+2)$

Teorema fundamental del álgebra: todo polinomio de grado ***n*** tiene exactamente ***n*** raíces (pueden ser reales y/o complejas).

$p(x) = -6 - x + x^2$ tiene 2 raíces: -2 y 3 (reales)

$p(x) = 2 - 2x + x^2$ tiene 2 raíces: -1+***i*** y -1-***i*** (complejas)

$p(x) = -26 + 25x - 8x^2 + 8x^3$ tiene 3 raíces: 2, 3-2***i*** y 3+2***i*** (una real y dos complejas)

Si un número complejo, *a*+*bi*, es raíz de un polinomio con coeficientes reales, entonces el complejo conjugado, ***a-bi***, también es raíz del mismo polinomio (es decir, las raíces complejas aparecen siempre por parejas).

Las raíces racionales de un ***polinomio de coeficientes enteros*** de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + x^n$$

son divisores de a_o (obsérvese que el coeficiente del término de mayor grado es 1).

<u>Ejemplo</u>: si el polinomio $p(x) = 2 - x + x^2$ tiene raíces racionales, éstas deben ser divisores de 2. Por lo tanto, 1, -1, 2 y -2 son posibles raíces de ***p***(*x*).

En general, si $\frac{b}{c}$ es raíz de un polinomio de la forma

$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$$

siendo $\frac{b}{c}$ una fracción racional irreducible, entonces ***b*** es un divisor de a_o y ***c*** es un divisor de a_n.

2.3.2.- Cálculo de las raíces de un polinomio

Son varios los métodos que nos permiten calcular las raíces de un polinomio:

- ***Resolución*** de la ecuación ***p***(*x*)***=0***, para lo cual son válidas todas las técnicas que se conozcan de resolución de ecuaciones.

- ***Gráficamente***, las raíces reales de un polinomio real ***p***(*x*) se pueden obtener (de manera aproximada) trazando la curva ***y*** =***p***(*x*), y hallando los puntos donde la curva se corta con el eje ***x***, ya que en tales puntos ***p***(*x*)=0.

- Si ***r*** es una raíz de ***p***(*x*) entonces ***p***(*x*) es divisible por (*x* - *a*), y recíprocamente. Lo anterior proporciona un método sencillo para el cálculo de las raíces, comprobando si ***p***(*x*) es divisible por (*x* - *a*) dando valores a ***a***. Para ello es interesante recordar que estos valores han de ser divisores de $\frac{a_0}{a_n}$, como se ha expuesto en el apartado 2.3.1. Para efectuar estas divisiones es socorrido el método de Ruffini, que se ha mencionado en el apartado 2.2.3.

2.4.- Factorización de polinomios

2.4.1.- Métodos para factorizar

En el apartado 1.3 se ha explicado en qué consiste factorizar una expresión algebraica y se han recordado algunas fórmulas útiles para ello. Todo lo allí expuesto es válido en el caso de los polinomios reales de una variable. Así, por ejemplo:

el polinomio $p(x)=x^2-4$ puede factorizarse como $p(x)=(x+2)\cdot(x-2)$, sin más que recordar la fórmula de la diferencia de cuadrados.

el polinomio $p(x)=x^2+4x+4$ puede factorizarse como $p(x)=(x+2)^2$, sin más que recordar la fórmula del cuadrado perfecto

Pero, además, si se conocen las raíces del polinomio, la factorización es inmediata, como se explica a continuación.

2.4.2.- Factorización cuando se conocen las raíces del polinomio

Como se ha dicho anteriormente, si ***a*** es una raíz de ***p***(*x*), entonces este polinomio es divisible por (*x-a*). Así, teniendo en cuenta la teoría expuesta en 2.2.3 para el cociente de polinomios, el polinomio puede descomponerse de la siguiente manera:

$p(x)=(x-a)\cdot c(x)$ siendo ***c***(*x*) el cociente entre ***p***(*x*) y *x-a*.

Pero a su vez ***c***(*x*) podría descomponerse de la misma forma, y así sucesivamente, resultando finalmente que la factorización de un polinomio es muy sencilla si se conocen sus raíces:

si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ tiene como raíces los números $r_1,r_2,\ldots,r_n$ entonces puede descomponerse de forma única como el producto:

$$p(x)=a_n\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

El polinomio x^3+4x^2+x-6 tiene como raíces $r_1=1, r_2=-2, r_3=-3$. Por lo tanto puede factorizarse como $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$

Si ***r*** es una raíz múltiple de orden ***p*** de un polinomio, en la factorización aparece el factor $(x-r)^p$.

El polinomio $x^4-x^3-7x^2+13x-6$ tiene como raíces $r_1=1$ (doble), $r_2=2$ (simple), $r_3=-3$ (simple). Por lo tanto puede factorizarse como $(x-1)^2\cdot(x-2)\cdot(x+3)$.

Según todo lo anterior, si queremos factorizar un polinomio y no conocemos sus raíces, podemos obtener éstas en primer lugar, mediante, por ejemplo, el método de Ruffini, y a continuación utilizarlas para factorizar como acabamos de explicar.

NOTA: es importante observar que, recíprocamente, si tenemos un polinomio factorizado, en él sus raíces se observan inmediatamente:

Las raíces del polinomio $p(x)=(x-3)\cdot(x+5)(x-2)$ son 3, -5 y 2 (todas ellas simples)

Las raíces del polinomio $p(x)=(x+1)\cdot(x-2)^3(x-1)$ son -1 y 1 (simples) y 2 (triple). Obsérvese que p(x) es un polinomio de grado 5 y por lo tanto ha de tener 5 raíces, repetidas o no (es decir, la suma de las multiplicidades de las raíces ha de dar 5).

3.- ECUACIONES (GENERALIDADES)

3.1.- Algunas definiciones

Una ***variable*** es un elemento que puede adquirir (o puede ser sustituida) por un valor cualquiera. Los valores que una variable es capaz de recibir pueden estar definidos dentro de un rango o conjunto determinado (por ejemplo, números positivos, ...). Las variables suelen denotarse mediante letras minúsculas a, b, c, ...

En general, una ***incógnita*** es algo que desconocemos. En álgebra una incógnita es una variable cuyo valor no conocemos y vamos a tratar de determinar. Las incógnitas suelen denotarse mediante las letras minúsculas x, y, z, ...

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, denominadas ***miembros*** de la ecuación. El primer miembro es el que aparece antes del signo de igualdad y el segundo miembro el que aparece después. Si en lugar del signo de igualdad aparecen los signos de desigualdad ($>, \geq, <, \leq, \neq$) la expresión se denomina ***inecuación.***

$2x^2-3=5x$ es una ecuación con una incógnita.

$3x-2y=5$ es una ecuación con dos incógnitas

$2x+y>5$ es una inecuación

Una ***ecuación racional entera*** (***o polinómica***) es una igualdad entre dos expresiones racionales enteras (o polinomios). Se llama ***grado de la ecuación*** al correspondiente al término de mayor grado. Las ecuaciones de grado 1 se llaman también ***ecuaciones lineales.*** Las ecuaciones de grado 2 se llaman también ***ecuaciones cuadráticas***.

$3x-2=7$ es una ecuación lineal (o de grado 1), con 1 incógnita.

$2x-y=8$ es una ecuación lineal (o de grado 1), con 2 incógnitas.

$3x^2-5x+3=0$ es una ecuación cuadrática (o de grado 2), con 1 incógnita.

$3x^2+2xy+3y-8=0$ es una ecuación cuadrática (o de grado 2), con 2 incógnitas

$xy+3y+5=0$ es una ecuación cuadrática (o de grado 2), con 2 incógnitas

Una ecuación en la que la(s) incógnita(s) figura(n) como exponente, se denomina ***ecuación exponencial***.

$2^x-5=9$ es una ecuación exponencial, con una incógnita

Una ecuación en la que la incógnita aparece dentro de un logaritmo se denomina ***ecuación logarítmica***.

$2\mathrm{L}(x)-3=0$ es una ecuación logarítmica, con una incógnita.

Se llama ***solución de una ecuación*** a cualquier valor de la(s) incógnita(s) que haga(n) que se verifique la igualdad. Es posible que una ecuación no tenga solución.

$x=2 \wedge y=3$ es solución de la ecuación $4xy-y=21$, ya que $4\cdot 2\cdot 3-3=21$

Las ecuaciones que se verifican para cualquier valor posible de sus incógnitas se llaman ***identidades.*** Para representar una identidad se emplea el símbolo $\equiv$ en lugar de $=$.

$x^2-4\equiv(x+2)\cdot(x-2)$ es una identidad

Un conjunto de ***m*** ecuaciones con ***n*** incógnitas $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ se denomina ***sistema de ecuaciones***. Dependiendo del tipo de las ecuaciones, los sistemas pueden ser lineales, o cuadráticos o ...

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ x-y-z=3 \\ x+2y-4z=8 \end{cases}$$ es un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

El sistema se llama ***homogéneo*** si el término independiente de todas las ecuaciones es cero; en caso contrario se denomina ***heterogéneo***.

Se denomina ***solución de un sistema*** de ***m*** ecuaciones con ***n*** incógnitas $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ al conjunto de valores $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ que hacen que se verifiquen todas las ecuaciones simultáneamente.

$x=1, y=-2, z=0$ es solución del sistema $\begin{cases} -x-y-z=1 \\ 4x-y+2z=6 \\ -5x+y-z=-7 \end{cases}$ ya que:

$$\begin{cases} -1-(-2)-0=1 \\ 4\cdot 1-(-2)+2\cdot 0=6 \\ -5\cdot 1+(-2)-0=-7 \end{cases}$$

Los sistemas de ecuaciones pueden tener solución o no tenerla. Cuando un sistema no tiene solución, se denomina ***incompatible*** y cuando la tiene se denomina ***compatible***.

Se dice que dos ***ecuaciones*** son ***equivalentes*** cuando tienen las mismas soluciones.

$3x=6$ y $x-2=0$ son equivalentes

Algunos métodos de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones se basan en transformar la ecuación o sistema en otra/o más sencilla/o equivalente a la/al original, como es el caso del método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales, que se expone en detalle en el tema correspondiente a Álgebra Lineal.

Nota: Una ***fórmula*** es una ecuación que expresa un hecho general, una regla o un principio.

$A=a\cdot b$ es la fórmula del área de un cuadrado cuyos lados miden a y b unidades.