GENERALIDADES

1.- CONJUNTOS Y ELEMENTOS

El concepto de elemento y de conjunto se puede entender por intuición a través de los siguientes ejemplos:

Conjunto: el alfabeto, una colección de sellos, una biblioteca...

Elementos: cada letra del alfabeto, cada sello de la colección, cada libro de la biblioteca...

En matemáticas, se define un conjunto como una colección, formada de elementos con características similares, considerada en sí misma como un objeto. Siempre que sea posible, designaremos los conjuntos mediante letras mayúsculas, A, B, C..., mientras que los elementos se representarán en minúsculas. Normalmente, los elementos de un conjunto vienen dados entre llaves. Hay diferentes expresiones para definir un conjunto. Estas son algunas de ellas:

Por extensión: si escribimos todos los elementos de un conjunto. Por ejemplo, las caras de un dado forman el conjunto A={1,2,3,4,5,6}.

Por comprensión: este modo de expresión se utiliza cuando una propiedad puede expresar todos los elementos del conjunto. Ejemplos:

$\mathbb{Q}=\left\{x=\dfrac{p}{q} \,/\, p,q\in\mathbb{Z}\right\}$, expresión que se leería: $\mathbb{Q}$ es el conjunto formado por los elementos x definidos como el cociente de P entre q, donde P y q pertenecen al conjunto $\mathbb{Z}$

$B=\{x\in\mathbb{N} \,/\, x \text{ es par}\}=\{2,4,6,\ldots\}$, B es el conjunto de los números naturales pares.

2.- LENGUAJE MATEMÁTICO

Cuando se habla sobre el lenguaje matemático, se suele hablar sobre dos conceptos diferentes. Por un lado, sobre la simbología matemática que se utiliza y, por otro lado, sobre la forma de presentar y estructurar los contenidos matemáticos.

La simbología matemática está repleta de caracteres gráficos que se llaman **logogramas** (Pimm 1990). Estos signos se pueden considerar "palabras" del lenguaje. Se deben conocer para saber interpretar y tener la capacidad de saber qué se quiere decir con ellos. En este apartado se explicará el significado de los principales logogramas.

2.1.- Para todo $\forall$

El logograma $\forall$ se lee ***para todo***. Colocado delante de un elemento de un conjunto, indica que la propiedad que sigue se verifica para todo (o para cualquier elemento) del conjunto. Por ejemplo:

$\forall x = 2n \,/\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x$ es un número par.

Expresión que se leería: para todo *x* igual a 2*n*, siendo *n* un número natural, entonces *x* es un número par.

2.2.- Existe $\exists$

El logograma $\exists$ se lee ***existe***. Colocado delante de un elemento de un conjunto, indica que la propiedad que sigue se cumple por lo menos para un elemento del conjunto. Por ejemplo, la frase: Siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de números enteros, $\exists x \in \mathbb{Z} \,/\, 4x^2 - 16 = 0$, se leería: siendo $\mathbb{Z}$ el conjunto de número enteros, existe (al menos) un número entero x que cumple la ecuación $4x^2 - 16 = 0$.

Casos particulares de este logograma:

$\exists!$: Este logograma significa que ***existe un único*** y se utiliza para expresar que la condición que sigue se cumple para un único elemento. Por ejemplo, $\exists!\; n \in \mathbb{N} \,/\, n + 5 = 2n$, se leería: existe un único número natural n, donde n cumple la condición de $n + 5 = 2n$.

$\nexists$: Este logograma se lee como ***no existe***. Se utiliza para señalar que en ese conjunto no hay ningún elemento que cumpla la condición que sigue al logograma. Ejemplo: $\nexists\, x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 1 = 0$. Es decir: no existe ningún número real *x* que sea solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$.

2.3.- Tal que / (también se usa :)

Se utiliza para señalar el "lugar" donde se cumple una propiedad. Se puede expresar como : o / y se lee ***tal que*** o ***donde***. El signo que más utilizaremos será /. Ejemplo: $\exists x \,/\, P(x) = 2$. Modo de leer: Existe un valor *x* tal que cumple la propiedad $P(x) = 2$.

2.4.- Por lo tanto (entonces) $\Rightarrow$

El logograma $\Rightarrow$ se lee como ***implica***, ***entonces*** o ***por lo tanto***. Es una implicación. Se utiliza para señalar que cuando una condición es verdad, la condición que le sigue también lo es.

$A \Rightarrow B$. Si *A* es verdadero entonces *B* también es verdadero. Si *A* es falso, no podemos decir nada sobre *B*. Si la condición no se cumple lo representaremos mediante $\not\Rightarrow$. Por lo tanto, en este caso puede que $\text{no } A \Rightarrow no\ B$ sea cierto o no.

La forma correcta en negativo de la condición $A \Rightarrow B$ sería $\text{no } B \Rightarrow \text{no } A$. Esta condición y $A \Rightarrow B$ son equivalentes.

Ejemplos: $x=5 \Rightarrow x^2=25$. Modos de leer: Si $x=5$ entonces, $x^2=25$. Que $x=5$ implica que $x^2=25$. Sin embargo, $x^2=25 \not\Rightarrow x=5$ (x también puede valer -5). Si quisiéramos poner esta condición en modo negativo sería de la siguiente manera: $x^2 \neq 25 \Rightarrow x \neq 5$.

2.5.- Si y sólo si $\Leftrightarrow$

Este logograma se lee como ***si y sólo si***, y también se suele ver expresado como ***sii***. Se utiliza para decir que las condiciones escritas a ambos lados son equivalentes, que en realidad quieren decir lo mismo.

$A \Leftrightarrow B$. Si A es cierto, entonces B también es cierto y viceversa. Si B es cierto, entonces A también es cierto. En forma negativa, esta condición se leería de la siguiente manera: Si A no es cierto, entonces B no es cierto y viceversa.

Ejemplo $x=2n \,/\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x$ es par. Modo de leer: $x=2n$, siendo n un número natural si y sólo si x es un número par. Se puede leer también en el otro sentido. x es par si y sólo si x se puede expresar como $x=2n$, siendo n un número natural.

2.6.- Y $\wedge$

Este logograma se lee como **y.** Sirve para unir dos condiciones. Se tendrán que cumplir las dos condiciones a la vez para que la condición sea cierta. Es una conjunción lógica. $A \wedge B$ es cierto si A y B son ciertas.

Ejemplo: $n \leq 3 \;\wedge\; n$ par $\Leftrightarrow n=2$. Modo de leer: $n \leq 3$ y n es par si y sólo si n es igual a dos. En este caso, 2 es el único número que cumple las dos condiciones a la vez.

2.7.- O $\vee$

Este logograma se lee como ***o***. Sirve para indicar que basta con que una de las condiciones sea cierta para que esa condición entera lo sea. Es una conjunción lógica. $A \vee B$ es cierto, si A es cierto o B es cierto. También pueden ser las dos condiciones a la vez ciertas.

Ejemplo: $n \leq 3 \;\vee\; n$ par $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow n=1,2,3,4,6,8,\ldots$

2.8.- Pertenece a $\in$

Este logograma se lee como ***en, está en, es elemento de, es miembro de, pertenece a***. Sirve para indicar que un elemento está dentro de un conjunto. Si aparece como $\notin$, se estará indicando que ese elemento no pertenece al conjunto que le sigue.

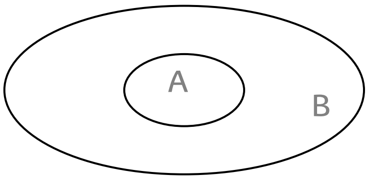
Ejemplo: $2 \in \mathbb{N}$. Modos de leer: Dos pertenece a $\mathbb{N}$ (números naturales). El número dos pertenece al conjunto de los números naturales. 2 es un elemento del conjunto de los números naturales. 2 es un número natural. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Modos de leer: Un medio no pertenece al conjunto de los números naturales. Un medio no es un número natural.

2.9.- Subconjunto de $\subset$

Este logograma se lee como *es subconjunto de*, *está incluido en*. Se utiliza para expresar la relación que hay entre dos conjuntos. Hay casos especiales de este logograma:

$A \subset B$: A es un subconjunto de B. A está incluido en B.

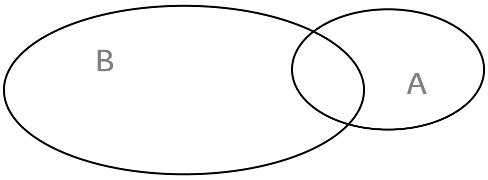
En este caso, el conjunto A es subconjunto de B, pero no tienen por qué ser iguales.



$A \subseteq B$: A es un subconjunto de B, pero puede que en algún caso sean iguales.

$A \subsetneq B$: A es un subconjunto de B, pero A y B nunca serán iguales, y esta condición se quiere dejar clara.

$A \not\subset B$: A no es un subconjunto de B.

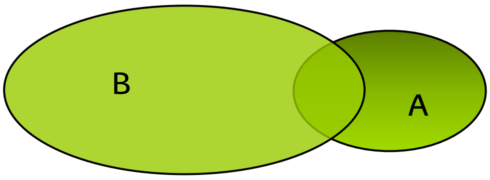


2.10.- Unión $\cup$

Este logograma se lee como *unión*. Si se tiene $A \cup B$ se crea un nuevo conjunto en el que están los elementos de A y los elementos de B.

El nuevo conjunto de unión será el siguiente: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

Gráficamente ($A \cup B$ es todo lo coloreado en verde):



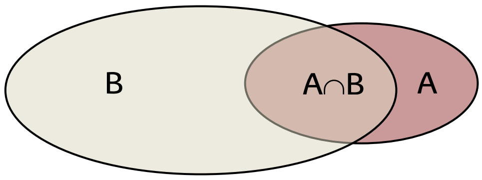
Si expresamos los elementos de los conjuntos:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{1,2,3,4,5\} \\ B = \{3,4,5,7,9\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$

2.11.- Intersección $\cap$

Este logograma se lee como *intersección de*. Si se tiene $A \cap B$ se crea un nuevo conjunto en el que estarán los elementos que tienen en común el conjunto A y el conjunto B. Se lee como A intersección B.

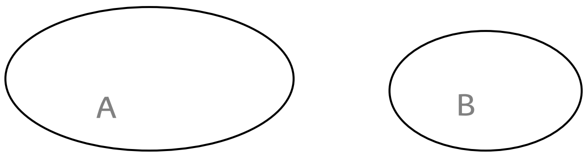
El nuevo conjunto de intersección será el siguiente: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$.



Si expresamos los elementos de los conjuntos:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{1,2,3,4,5\} \\ B = \{3,4,5,7,9\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = \{3,4,5\}$$

Caso particular: Si los conjuntos A y B no tienen elementos en común, se expresará como $A \cap B = \varnothing$ ($\varnothing$ representa el conjunto vacío). Expresado gráficamente, queda de la siguiente manera:



2.12.- Sumatorio Σ

Este logograma , $\sum$, se llama *sumatorio*. Se utiliza para sumar el valor expresado de manera general, tantas veces como se indique mediante los índices. El valor que aparece en la parte inferior del sumatorio indica a partir de qué valor se empieza a sumar y el de la parte superior hasta qué valor hay que sumar.

$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. El primer valor es para $i=1$ y se empieza a sumar de uno en uno hasta llegar al último valor, es decir, hasta que $i=n$.

Ejemplo: $\sum_{i=1}^{5} i^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125$

2.13.- Producto $\prod$

Este logograma, $\prod$, se llama *producto*. Es equivalente al sumatorio, pero en vez de sumar los términos, hay que hacer el producto entre ellos.

$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$. Modo de leer: Producto de $i=1$ a $i=n$ del valor a_i.

Ejemplo: $\prod_{i=1}^{3} i^2 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9$

Todos los logogramas que se han visto, están resumidos en la siguiente tabla:

Logograma	Significado
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
: , /	Donde, tal que
$\Rightarrow$	Implica (por tanto)
$\Leftrightarrow$, sii	Si y sólo si
$\wedge$	y
$\vee$	O
$\in$	Pertenece a
$\subset$	Incluido en
$\bigcup$	Unión
$\bigcap$	Intersección
$\sum$	Sumatorio
$\prod$	Producto

3.- CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS

Los números se pueden distribuir en conjuntos diferentes, dependiendo de su naturaleza. Los conjuntos de números más importantes son los que definimos a continuación.

3.1.- Números naturales $\mathbb{N}$

Los números naturales son los que usamos para contar los objetos o elementos de un conjunto. Estos números se denotan mediante la letra $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Se ve claramente que el resultado de la suma o el producto de dos números naturales es otro número natural. Pero esta propiedad, en general, no es cierta con la resta y la división.

3.2.- Números enteros $\mathbb{Z}$

El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, el cero y los números naturales cambiados de signo. Se denotan mediante la letra $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

En este caso, hay que tener en cuenta que el resultado de la suma, resta o producto de dos números enteros, es otro número entero. Sin embargo, en general, la división de dos números enteros no tiene por qué ser otro número entero.

3.3.- Números primos $\mathbb{P}$

Son los números naturales mayores que 1, que sólo son divisibles por sí mismo y por la unidad. Estos números se denotan mediante la letra $\mathbb{P}$:

$\mathbb{P}=\{2,3,5,7,11,13,17,...\}$

Se ve claramente que $\mathbb{P}\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

3.4.- Números racionales $\mathbb{Q}$

Un número racional es aquel que se expresa como cociente de dos números enteros. El conjunto de los números racionales se denota con la letra $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}=\left\{x=\frac{a}{b}\,/\,a,b\in\mathbb{Z}\right\}$$

Se ve claramente que cualquier número entero es, en realidad, también un número racional, ya que se puede escribir como él mismo entre uno. Ejemplo: $-5=\frac{-5}{1}$ o $4=\frac{4}{1}$

Por todo esto, tenemos que $\mathbb{P}\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

El resultado de sumar, restar, multiplicar o dividir (excepto por cero) dos números racionales es otro número racional.

Ejemplos: 0, 2/3, -5, 1/78, 19, -5/4... son todos números racionales.

3.5.- Números irracionales $\mathbb{I}$

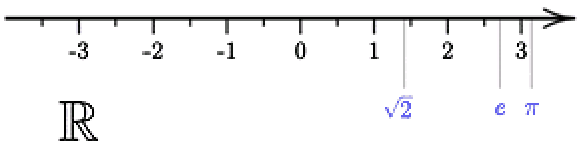
Los números irracionales son los números reales que no son racionales. Es decir, son los números reales que no se pueden expresar mediante el cociente de dos números enteros. Estos números se denotan mediante la letra $\mathbb{I}$. La intersección entre este conjunto y los definidos anteriormente es el conjunto vacío (no habrá ningún elemento).

Ejemplos: $\sqrt{2}$, $\pi=3.14159....$, $e=2.7183...$ Son números irracionales.

3.6.- Números reales $\mathbb{R}$

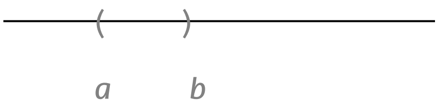
En el conjunto de números reales se encuentran todos los conjuntos que se han definido hasta ahora. Es decir, en este conjunto están los números primos, naturales, enteros, racionales e irracionales. Por un lado tenemos que $\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y por otro lado $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. También se puede escribir que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Los números reales se pueden ordenar de menor a mayor y situar en una recta que llamaremos *recta real*. Esta propiedad, aunque parezca muy simple, es una propiedad muy importante de los números reales.

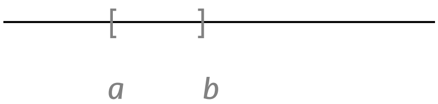


3.6.1.- Intervalos de los números reales

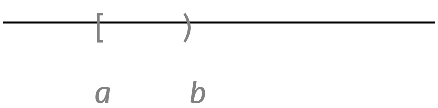
Intervalo abierto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$



Intervalo cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x \le b\}$



Intervalo semiabierto: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x < b\}$



Semirrecta que empieza en el punto a: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \ge a\}$

Siguiendo ese esquema, se pueden crear más tipos de intervalos.

3.6.2.- Operaciones con números reales: potencias y radicales.

Potencias:

$$a^k \cdot a^p = a^{k+p}$$

$$\frac{a^k}{a^p} = a^{k-p}$$

$$\left(a^k\right)^p = a^{k\cdot p}$$

$$\left(a \cdot b\right)^k = a^k \cdot b^k$$

Radicales:

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[n\cdot k\cdot p]{a}$$

3.7.- Números complejos $\mathbb{C}$

Si se considera la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en el conjunto de los números reales, no tiene solución. Para que todo polinomio tenga tantas soluciones como el grado del polinomio (contando las multiplicidades), se crean los números llamados complejos y se denotan mediante la letra $\mathbb{C}$.

Estos números tienen la siguiente forma: $z = a + bi \ / \ a, b \in \mathbb{R}$, donde $\sqrt{-1} = i$. a se denomina parte real y b parte imaginaria del número complejo.

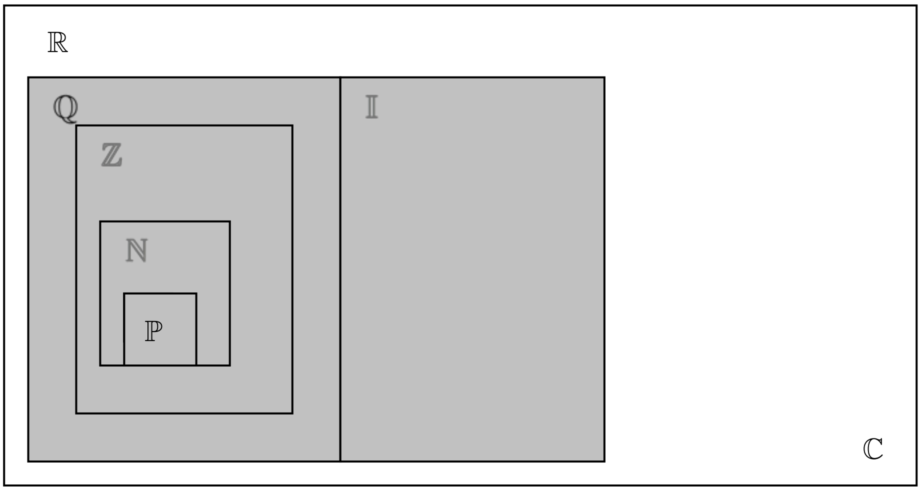
Está claro que todos los conjuntos de números definidos anteriormente pertenecen al conjunto de los números complejos (basta hacer $b = 0$). Por tanto, se cumple que, por una parte, $\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, y por otra, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

3.7.1.- Suma de números complejos.

La suma de dos números complejos se calcula de la siguiente manera:

$$z = z_1 + z_2 = \left(a_1 + b_1 i\right) + \left(a_2 + b_2 i\right) = \left(a_1 + a_2\right) + \left(b_1 + b_2\right) i$$

3.7.2.- Diagrama de relación de los conjuntos de números.



La parte que está en tono gris representa todos los números reales. El conjunto entero son todos los números complejos. En la parte sin colorear están los números complejos no reales (aquellos en los que $b \neq 0$).

4.- DICCIONARIO

La presentación del contenido de Matemáticas se realiza mediante palabras tales como *Definición*, *Teorema*, *Lema*... La palabra que usemos especificará qué tipo de contenido es el que viene a continuación. Además, cualquier enunciado o afirmación matemática viene a continuación de una de esas palabras, creando un claro orden de contenidos. Veamos el significado de algunos de estos términos.

Axioma. Cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría. Fórmulas que son satisfechas por cualquier estructura y por cualquier función variable. En términos coloquiales, los axiomas son enunciados que son verdaderos en cualquier universo posible, bajo cualquier interpretación posible y con cualquier asignación de valores. Ejemplo de axioma matemático: Entre dos puntos pasa una única línea recta

Proposición. Enunciación de una verdad demostrada o que se trata de demostrar. Ejemplo: El intervalo $[0,1]$ es un conjunto infinito y no numerable.

Lema. Proposición que es preciso demostrar antes de establecer un teorema. Ejemplo (Lema de Euclides): Si n es un número entero divisor del producto de dos números $a \cdot b$, y no es divisor de a, entonces es divisor de b.

Teorema. Proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas o de otros teoremas ya demostrados, mediante reglas de inferencia aceptadas. Proposición por medio de la cual, partiendo de un supuesto (hipótesis), se afirma una verdad (tesis) que no es evidente por sí misma. Ejemplo (Teorema fundamental de la aritmética): Todo número natural mayor que 1 es un número primo o un único producto de números primos (Nota: en la demostración de este teorema se utiliza el Lema de Euclides anteriormente mencionado).

Corolario. Proposición que no necesita prueba particular, sino que se deduce fácilmente de lo demostrado antes. Ejemplo: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos infinitos y no numerables. (Nota: se trata de un corolario porque este resultado se demuestra fácilmente a partir del que aparece como ejemplo de proposición).

Definición. Proposición que expone con claridad y exactitud los caracteres genéricos y diferenciales de algo material o inmaterial.

Demostración. Prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes. Comprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o de una teoría.

Propiedad. Atributo o cualidad esencial de alguien o algo. Ejemplo (propiedad aritmética de los límites): Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\ell+m$

5.- ALFABETO GRIEGO

En Matemáticas a menudo se utilizan letras del alfabeto griego para definir parámetros o incógnitas. En el siguiente cuadro se presenta el alfabeto griego y el nombre de cada una de las letras que lo conforman.

Min.	May.	Nombre	Min.	May.	Nombre
α	A	Alfa	ν	N	Nu
β	B	Beta	ξ	Ξ	Xi
γ	Γ	Gamma	o	O	Ómicron
δ	Δ	Delta	π	Π	Pi
ε	E	Épsilon	ρ	P	Ro
ζ	Z	Zeta	σ	Σ	Sigma
η	H	Eta	τ	T	Tau
θ	Θ	Theta	υ	Υ	Ypsilon
ι	I	Iota	φ	Φ	Fi
κ	K	Kappa	χ	X	Ji
λ	Λ	Lambda	ψ	Ψ	Psi
μ	M	Mu	ω	Ω	Omega