

CÁLCULO: EXÁMEN DE AUTOEVALUACIÓN

RESOLUCIÓN

EJERCICIO 1

Calcular el dominio de la siguiente función $f(x) = \sqrt{|x-2| - |x+2|}$

Solución:

$$D\left(f(x) = \sqrt{|x-2| - |x+2|}\right) = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| - |x+2| \geq 0\}$$

Para resolver la inecuación primero deben descomponerse los valores absolutos.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad |x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -(x+2), & x < -2 \end{cases}$$

Es de gran ayuda representar en una tabla, según la recta real, la descomposición de cada valor absoluto:

$ x-2 $	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$ x+2 $	$-(x+2)$	$x+2$	$x+2$
$ x-2 - x+2 $	4	$-2x$	-4
	$-\infty$	-2	2
	∞		
$ x-2 - x+2 \geq 0$	$4 \geq 0$	$-2x \geq 0$	$-4 \geq 0$
	Si	$x \leq 0$	No

Por tanto, $|x-2| - |x+2| \geq 0 \rightarrow -\infty < x \leq 0$ y entonces,

$$D\left(f(x) = \sqrt{|x-2| - |x+2|}\right) = \{x \in \mathbb{R} / |x-2| - |x+2| \geq 0\} = (-\infty, 0]$$

EJERCICIO 2

Representar gráficamente en el espacio real la siguiente función $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$

Solución:

Paso 1: obtener el dominio de la función:

Como se trata de una función racional, los puntos que no estarán en el dominio son aquellos que anulan el denominador:

$$D(f(x)) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Paso 2: analizar la simetría y periodicidad de la función:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^3} = \frac{-x}{1-x^3} \neq f(x)$$

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^3} = \frac{-x}{1-x^3} \neq -f(x)$$

Por tanto, la función no tiene simetría y al ser la función racional, tampoco es periódica.

Paso 3: obtener los puntos de corte de la función con los ejes:

- Puntos de corte en el eje y ($x=0$):

Si $x=0$, entonces $f(0) = \frac{0}{1+(0)^3} = 0$, por tanto, en el punto $(x,y)=(0,0)$, es decir, corta el origen.

- Puntos de corte en el eje x ($y=0$):

Si $y=0$, entonces $f(x) = \frac{x}{1+x^3} = 0$, por tanto, de nuevo se obtiene el punto $(x,y)=(0,0)$.

Paso 4: asíntotas

- La función presenta una asíntota vertical en $x=-1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1+x^3} = \infty$$

Si $x \rightarrow -1^-$ entonces $f(x) \rightarrow \infty$

Si $x \rightarrow -1^+$ entonces $f(x) \rightarrow -\infty$

- La función presenta una asíntota horizontal en $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1+x^3} = 0$$

Paso 5: máximos y mínimos de la función e intervalos en los cuales la función es creciente y decreciente.

Los posibles máximos y mínimos de la función se encuentran en los puntos en los que la primera derivada de la función se anula:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^3) - x \cdot 3x^2}{(1+x^3)^2} = \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0.7937$$

Para saber si el punto obtenido, $x = 1/\sqrt[3]{2}$, se trata de un máximo, mínimo o punto de inflexión, se sustituye dicho punto en la segunda derivada de la función:

$$f''(x) = \frac{-6x^2 \cdot (1+x^3)^2 - (1-2x^3) \cdot 2(1+x^3) \cdot 3x^2}{(1+x^3)^4} = \frac{-12x^2 + 6x^5}{(1+x^3)^3}$$

Como $f''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = -1.6799 < 0$ se trata de un máximo.

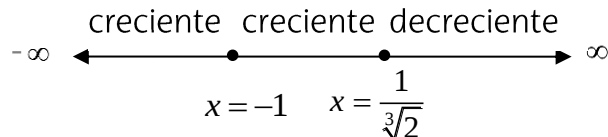
Por tanto, en el punto $P(x=0.7937, y=0.529)$ la función presenta un máximo.

Para saber en qué intervalos la función es creciente o decreciente se proponen diferentes intervalos teniendo en cuenta el punto, $x = 1/\sqrt[3]{2}$, en los que la función presenta un máximo y el punto, $x = -1$, que queda fuera del dominio de la función. En cada intervalo se escoge un punto y en base al valor de la primera derivada de la función en dicho punto la función será creciente (>0) o decreciente (<0):

$$f'(-2) = \frac{1-2 \cdot (-2)^3}{(1+(-2)^3)^2} > 0 \Rightarrow \text{En el intervalo } (-\infty, -1) \text{ la función es creciente.}$$

$f'(0.1) = \frac{1-2 \cdot 0.1^3}{(1+0.1^3)^2} > 0 \Rightarrow$ En el intervalo $\left(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ la función es creciente.

$f'(2) = \frac{1-2 \cdot 2^3}{(1+2^3)^2} = \frac{-15}{81} < 0 \Rightarrow$ En el intervalo $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty\right)$ la función es decreciente.



Paso 6: puntos de inflexión de la función, convexidad y concavidad.

Los posibles puntos de inflexión de la función son aquellos que anulan la segunda derivada de la función:

$$f''(x) = \frac{-12x^2 + 6x^5}{(1+x^3)^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{2} = 1.25992 \\ x = 0 \end{cases}$$

Para verificar que son puntos de inflexión sustituimos los puntos obtenidos en la tercera derivada de la función:

$$f'''(x) = \frac{6x(4-19x^3+4x^6)}{(1+x^3)^4} = \frac{-24x+114x^4-24x^7}{(1+x^3)^4}$$

$f'''(\sqrt[3]{2}) = 1.67989 \neq 0$, por tanto, $x = \sqrt[3]{2}$ es un punto de inflexión.

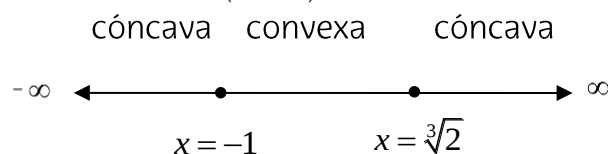
$f'''(0) = 0$, por tanto, $x = 0$ no es un punto de inflexión.

Para saber en qué intervalos la función es cóncava o convexa se proponen diferentes intervalos teniendo en cuenta el punto de inflexión, $x = \sqrt[3]{2}$, y el punto, $x = -1$, que queda fuera del dominio de la función.

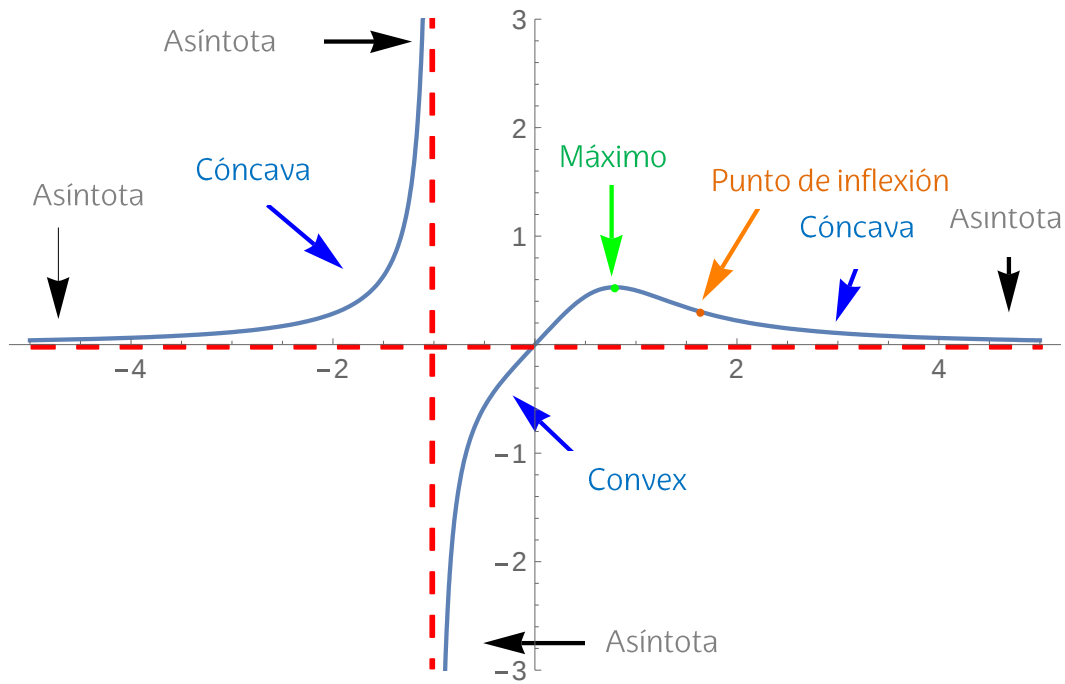
$f'''(-2) > 0 \Rightarrow$ En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función es cóncava.

$f'''(1) < 0 \Rightarrow$ En el intervalo $(-1, \sqrt[3]{2})$ la función es convexa.

$f'''(2) > 0 \Rightarrow$ En el intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$ la función es cóncava.



Paso 7: representación gráfica de la función.



EJERCICIO 3

Deducir la expresión general del producto $\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$, haciendo uso de la resta y suma de ángulos de razones trigonométricas.

Solución:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad (2)$$

y sumando las ecuaciones (1) y (2):

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

EJERCICIO 4

Resolver la siguiente ecuación: $-3\sin(x) + \cos^2(x) = 3, \quad x \in \mathbb{R}.$

Solución:

$$\begin{aligned} -3\sin(x) + \cos^2(x) = 3 &\rightarrow -3\sin(x) + 1 - \sin^2(x) = 3 \\ \sin^2(x) + 3\sin(x) + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sin(x) = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\sin(x) = -1 \rightarrow x = 3\pi/2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) = -2 \rightarrow \text{Imposible, cuando } x \text{ es real se cumple } -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

EJERCICIO 5

Calcular la derivada de la siguiente función

$$f(x) = \sqrt[7]{\left(\frac{1}{e} + e^{x^2}\right)^5}$$

Solución:

$$f(x) = \sqrt[7]{(g(x))^5} \quad \text{donde} \quad g(x) = \frac{1}{e} + e^{x^2}$$

$$f(x) = g(x)^{\frac{5}{7}} \quad \text{por tanto} \quad f'(x) = \frac{5}{7} g(x)^{\frac{5}{7}-1} g'(x) = \frac{5}{7} g(x)^{-\frac{2}{7}} g'(x)$$

$$\forall g(x) = \frac{1}{e} + e^{h(x)} \quad \text{donde} \quad h(x) = x^2$$

$$\text{Por tanto, } g'(x) = e^{h(x)} h'(x) \text{ donde } h'(x) = 2x$$

Finalmente, se obtiene la siguiente expresión para la derivada de función $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{5}{7} \left(\frac{1}{e} + e^{x^2}\right)^{-\frac{2}{7}} e^{x^2} 2x$$

EJERCICIO 6

Calcular la siguiente integral:

$$\int \cos^5 x \, dx$$

Solución:

Dado que la potencia es impar, se debe hacer uso de la siguiente igualdad, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$:

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \int \cos x \cos^4 x \, dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)^2 dx = \\&= \int \cos x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) dx = \\&= \int \cos x \, dx - 2 \int \cos x \sin^2 x \, dx + \int \cos x \sin^4 x \, dx \\&= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C\end{aligned}$$

Nota: Las imágenes contenidas en este archivo han sido creadas por el equipo docente de este curso y deberán utilizarse en los términos de la licencia Creative Commons CC BY-NC-SA.