E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ÁLGEBRA: EXÁMEN DE AUTOEVALUACIÓN

RESOLUCIÓN

EJERCICIO 1:

Sea la siguiente matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores del parámetro *p* para los que la matriz no tiene inversa.

b) Para el caso *p*=2, ¿la matriz A tiene inversa? Si la respuesta es afirmativa, calcular su inversa utilizando el adjunto y utilizando el método de Gauss-Jordan.

Solución:

a) La inversa de una matriz no existe cuando su determinante es nulo, $|A|=0$. Por ello, calculamos el determinante de la matriz A y evaluamos para que valores de *p* éste se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{vmatrix}=p^3-p=0\Rightarrow\begin{cases} p=0 \\ p=\pm 1 \end{cases}$$

Es decir, cuando *p* toma los valores 0, +1 ó -1, la matriz A no posee inversa, para el resto de casos sí que tiene inversa.

b) Para el valor *p*=2, la inversa de la matriz existe ya que es diferente de 0, +1 y -1. La matriz A es la siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, vamos a calcular la inversa de la matriz a partir de su matriz adjunta. Para ello recordamos la fórmula para calcularla:

$$A^{-1}=\frac{A^a}{|A|}$$

Antes de nada, calculamos el determinante de A, como hemos hecho anteriormente en función del parámetro A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot 1=6$$

Ahora calculamos la matriz adjunta de A (A^a). Para esto debemos calcular el adjunto de cada elemento de la matriz, esto es, el menor de cada elemento con el signo correspondiente:

$$A^*=\begin{pmatrix}(+1)\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ (-1)\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ (+1)\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

Ahora, la matriz adjunta será la matriz traspuesta de la matriz anterior:

$$A^a=\left(A^*\right)^t=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -3 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Por último, aplicando la fórmula podemos calcular la matriz inversa:

$$A^{-1}=\frac{A^a}{|A|}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -3 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ahora aplicaremos el método de Gauss-Jordan para calcular la inversa de la matriz A.

En el método de Gauss-Jordan el sistema $(A|I)$ se debe convertir en el sistema $(I \mid A^{-1})$ utilizando transformaciones elementales, esto es:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

En primer lugar, trataremos de convertir el elemento $a_{11}=2$ en 1. Para ello, se pueden utilizar diferentes transformaciones: dividir la primera fila entre 2, intercambiare las filas 1 y 3, etc. Nosotros aplicamos la segunda opción:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1 \leftrightarrow F3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, se deben convertir en 0 los elementos de la primera columna fuera de la diagonal, $a_{21}=1$ y $a_{31}=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F2 \leftarrow F2-F1 \\ F3 \leftarrow F3-2F1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Y comenzamos de nuevo. El segundo elemento de la diagonal, $a_{22}=3$, se debe convertir en 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F2 \leftarrow F2/3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Entonces, en la segunda columna se deben convertir en 0 los elementos de fuera de la diagonal. En este caso, ese trabajo está hecho.

Ahora, aplicando el mismo procedimiento en la tercera columna, convertimos el elemento de la diagonal en 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F3 \leftarrow F3/(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Y se deben convertir en 0 los elementos de fuera de la diagonal, $a_{13} = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1 \leftarrow F1 - F3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para terminar, si identificamos la matriz inversa en el método de Gauss-Jordan:

$$(A|I) \rightarrow (I|A^{-1})$$

Entonces,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a-4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro *a*.

b) Resuelve el sistema para el caso *a*=4.

Solución:

a) Primero, se expresa el sistema en forma matricial, matriz de coeficientes (A) y matriz ampliada (AM):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ eta}$$

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & a-4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Para discutir el sistema se debe calcular el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

Utilizamos el método de Gauss para ello:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3 \leftarrow F3-F1]{F2 \leftarrow F2+F1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a-3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3 \leftarrow F3+F2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a-3 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 cuando el parámetro *a* vale 2 y 3 en todos los demás casos:

$$a = 2 \Rightarrow rg(A) = 2$$
$$a \neq 2 \Rightarrow rg(A) = 3$$

Del mismo modo, calculamos el rango de la matriz AM:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & a-4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3 \leftarrow F3-F1]{F2 \leftarrow F2+1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3 \leftarrow F3+F2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 0 & a-2 & 18 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz AM vale siempre 3.

Por tanto, la discusión del sistema es la siguiente:

$$a = 2 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg(AM) = 3 \rightarrow \text{ Sistema incompatible}$$
$$a \neq 2 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(AM) = 3 \rightarrow \text{ Sistema compatible determinado}$$

b) Para el caso *a*=4 el sistema será compatible determinado y tendrá una única solución.

Nuestro sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

Se expresa el sistema en forma matricial, matriz de coeficientes (*A*) y matriz ampliada (*AM*):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ eta } AM = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Como para discutir el sistema hemos escalonado la matriz ampliada, utilizaremos el método de Gauss. La matriz escalonada es la siguiente:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{pmatrix}$$

Se expresa la matriz escalonada que hemos conseguido como sistema de ecuaciones y, comenzando por la ecuación inferior y en orden ascendente, se resuelven las ecuaciones una a una.

$$\begin{cases} x - y + z = 6 & \Rightarrow \quad x - (-2) + 9 = 6 \Rightarrow \boxed{x = -5} \\ -2y + z = 13 & \Rightarrow \quad -2y + 9 = 13 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow \boxed{y = -2} \\ 2z = 18 & \Rightarrow \quad \boxed{z = 9} \end{cases}$$

La solución es la siguiente:

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases}$$

EJERCICIO 3:

Calcula las raíces del siguiente polinomio utilizando el método de Ruffini.

$$p(x) = x^2 - 5x - 14$$

Solución:

El primer paso es probar con un divisor, por ejemplo, con la raíz 7:

	1	**-5**	**-14**
7		7	14
	1	2	0

Por tanto, 7 es una raíz del polinomio.

En el segundo paso probamos con la raíz -2:

	1	**-5**	**-14**
-2		-2	14
	1	-7	0

Por tanto, -2 es una raíz del polinomio.

Para terminar, podemos expresar el polinomio de la siguiente manera:

$$p(x) = x^2 - 5x - 14 = (x + 2)(x - 7)$$

EJERCICIO 4:

Obtén el punto simétrico al punto P(1,3,-4) respecto del plano $\pi \equiv 3x + y - 2z = 0$

Solución:

Paso 1: En primer lugar comprobaremos si el punto P(1,3,-4) está en el plano $\pi \equiv 3x + y - 2z = 0$, dado que si el punto está en el plano el punto simétrico sería el mismo punto:

$3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) \neq 0$ (el punto no pertenece al plano)

Paso 2: Construimos la recta r que pasa por el punto P y que sea perpendicular al plano π:

Dado que r ⊥ π, el vector director de la recta es el vector normal al plano π,

$\vec{n} = (3,1,-2)$

A partir este vector normal y el punto P se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -4 - 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathrm{R}$$

Paso 3: se obtiene el punto de corte entre el plano π y la recta r:

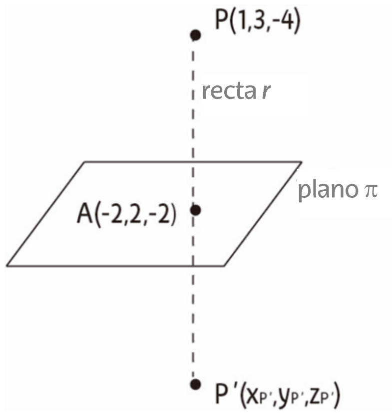
Para ello, se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta r en la ecuación implícita del plano π:

$3 \cdot (1+3\lambda) + 1 \cdot (3+\lambda) - 2 \cdot (-4-2\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = -1$

Sustituyendo el valor $\lambda = -1$ en las ecuaciones paramétricas se obtiene el punto de corte entre la recta r y el plano π: A(-2,2,-2)

Paso 4: Dado que el punto A se encuentra en el punto medio del segmento limitado por el punto P y el punto P ʹ, entre las coordenadas de los tres puntos se cumple la siguiente relación:

$$\begin{cases} \dfrac{x_P + x_{P'}}{2} = x_A \\ \dfrac{y_P + y_{P'}}{2} = y_A \\ \dfrac{z_P + z_{P'}}{2} = z_A \end{cases}$$



Así, el cálculo del punto P'($x_{P'}$, $y_{P'}$, $z_{P'}$) es inmediato:

$$\begin{cases} \dfrac{1 + x_{P'}}{2} = -2 & \Rightarrow x_{P'} = -5 \\ \dfrac{3 + y_{P'}}{2} = 2 & \Rightarrow y_{P'} = 1 \\ \dfrac{-4 + z_{P'}}{2} = -2 & \Rightarrow z_{P'} = 0 \end{cases}$$

Por tanto, el punto simétrico al punto P(1,3,-4) respecto al plano $\pi \equiv 3x + y - 2z = 0$ es el punto P'(-5,1,0).