E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BLOQUE A-V: Espacio afín y métrico

EJERCICIO 1:

Dada la recta $r: \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ y el punto $P(1,1,1)$:

a) Calcula la ecuación del plano π que contiene a la recta r y pasa por el punto P

b) Calcula la distancia entre el plano anterior π y la recta $s: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) Calcula la distancia entre el plano anterior π y la recta $t: \begin{cases} x=2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Solución:

a) Primero se comprueba si el punto $P(1,1,1)$ pertenece a la recta $r: \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ sustituyendo sus coordenadas en la ecuación continua de la recta. Como el punto no satisface dicha ecuación, es decir , $\frac{1+1}{-1}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{1-1}{2}$, se concluye que el punto no pertenece a la recta.

Por otra parte, se calcula la ecuación del plano con tres puntos no alineados o con un punto y dos vectores linealmente independientes. En este caso se considera el punto $P_r=(-1,0,1)$ de la recta y su vector director $\vec{v}=(-1,1,2)$, considerando otro vector del plano $\vec{w}=\overrightarrow{PP_r}=(-2,-1,0)$.

El vector normal del plano $\vec{n}_\pi$ se calcula mediante el producto vectorial de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\vec{n}_\pi=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$$

El vector normal del plano es $\vec{n}_\pi = (2,-4,3)$ y por lo tanto, la ecuación implícita del plano viene dada por la ecuación: π: $2x-4y+3z+D=0$.

Como el punto P pertenece al plano satisface su ecuación y de esta forma se puede determinar el coeficiente D: $2-4+3+D=0 \Rightarrow D=1$

Por lo tanto, la ecuación del plano π que contiene al punto P a la recta r es $2x-4y+3z+1=0$

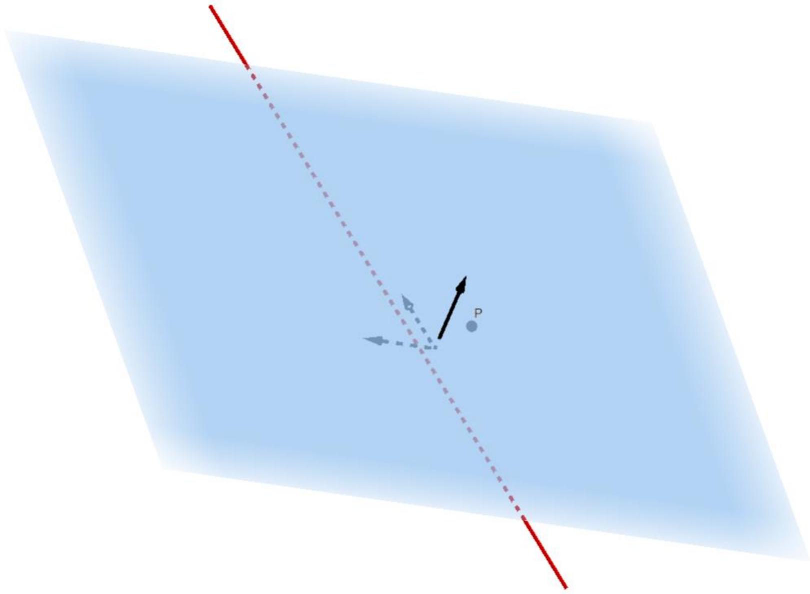

Figura 1. Representación gráfica del plano.

b) Se estudia la posición relativa del plano π y la recta s. El vector director de la recta $s: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1+2\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z=1+3\lambda \end{cases}$ es $\vec{v}_s = (1,2,3)$. Se calcula entonces el producto escalar entre el vector director de la recta y el vector normal del plano:

$$\vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 3 \neq 0$$

Los vectores no son perpendiculares entonces la recta y el plano se cortan. En consecuencia, la distancia entre el plano y la recta es cero.

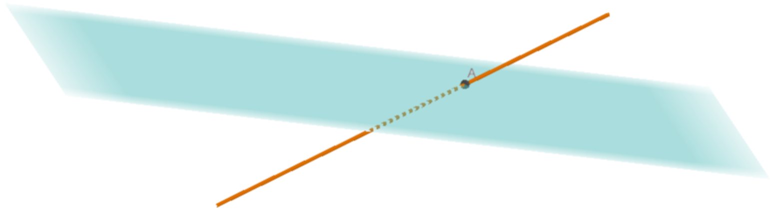

Figura 2. Representación gráfica de la posición relativa entre el plano y la recta

c) Se calcula la posición relativa entre el plano π y la recta $t:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=1-4\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

El vector director de la recta es $\vec{v}_t=(2,-2,-4)$. Mediante el producto escalar determinamos dicha posición relativa.

$$\vec{v}_t \cdot \vec{n}_\pi = 2 \cdot 2+(-2) \cdot (-4)+(-4) \cdot 3=0 \Rightarrow \vec{v}_t \perp \vec{n}_\pi$$

Los dos vectores son ortogonales, por lo tanto, o la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Para ello, se analiza si un punto de la recta pertenece también al plano. Por ejemplo, $R(0,0,1)$ es un punto de la recta que no verifica la ecuación del plano, ya que $3+1 \neq 0$. Por lo tanto, la recta y el plano son paralelos.

Para calcular la distancia entre el plano y la recta basta calcular la distancia entre cualquier punto de la recta y el plano. En este caso se calculará la distancia del punto R al plano, es decir la distancia de R a Q, siendo Q el punto de corte de la recta que pasa por R y es perpendicular al plano.

La ecuación continua de la recta t' que pasa por R y es perpendicular al plano es:

$$t': \ \frac{x}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{3}.$$

Y sus ecuaciones implícitas son $t':\begin{cases} 4x+2y=0 \\ 3x-2z+2=0 \end{cases}$

Para determinar el punto de corte Q se resuelve el siguiente sistema de Gauss:

$$\begin{cases} 2x-4y+3z+1=0 \\ 4x+2y=0 \\ 3x-2z+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{f_1\leftarrow f_1/2}{f_2\leftarrow f_2/2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{f_2\leftarrow f_2-2f_1}{f_3\leftarrow f_3-3f_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -13/2 & -1/2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{f_3\leftarrow f_3-\frac{6}{5}f_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -29/10 & -17/10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+\dfrac{3}{2}z=\dfrac{-1}{2} \\ 5y-3z=1 \\ \dfrac{-29}{10}z=\dfrac{-17}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-8}{29} \\ y=\dfrac{16}{29} \\ z=\dfrac{17}{29} \end{cases}$$

Las coordenadas del punto son $Q=\left(\frac{-8}{29},\frac{16}{29},\frac{17}{29}\right)$. Por lo tanto, la distancia será la norma del vector $\overrightarrow{RQ}$:

$$\left\|\overrightarrow{RQ}\right\|=\left\|\left(\frac{-8}{29},\frac{16}{29},\frac{12}{29}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{-8}{29}\right)^2+\left(\frac{16}{29}\right)^2+\left(\frac{12}{29}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{29}}$$ unidades.

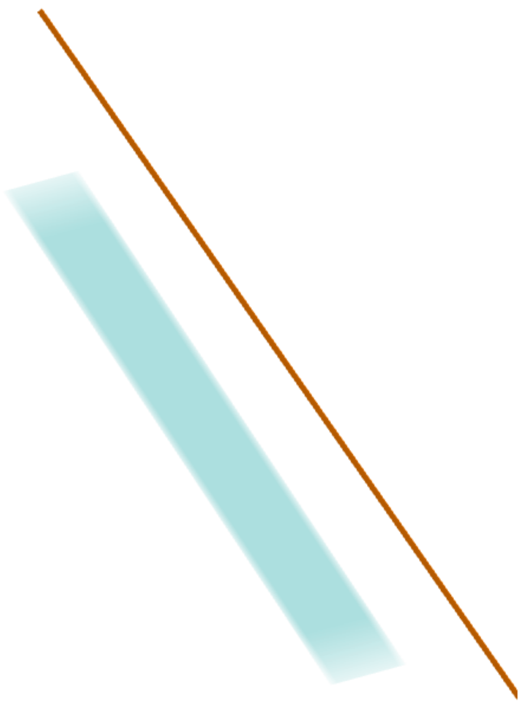

Figura 3. Representación gráfica de la posición relativa entre el plano y la recta

EJERCICIO 2:

Dado el plano π_1: $2x - y + 2z = 5$:

a) Calcula la distancia entre el plano π_1 y el plano $\pi_2 : x + y - z = -2$.

b) Calcula la distancia entre el plano π_1 y el plano $\pi_3 : -2x + y - 2z = 0$.

Solución:

a) Se analiza la posición relativa entre planos mediante sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_{\pi_1} = (2,-1,2)\\ \vec{n}_{\pi_2} = (1,1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow$$ en este caso como los vectores normales no son proporcionales π_1 y π_2 se cortan y su distancia es nula.

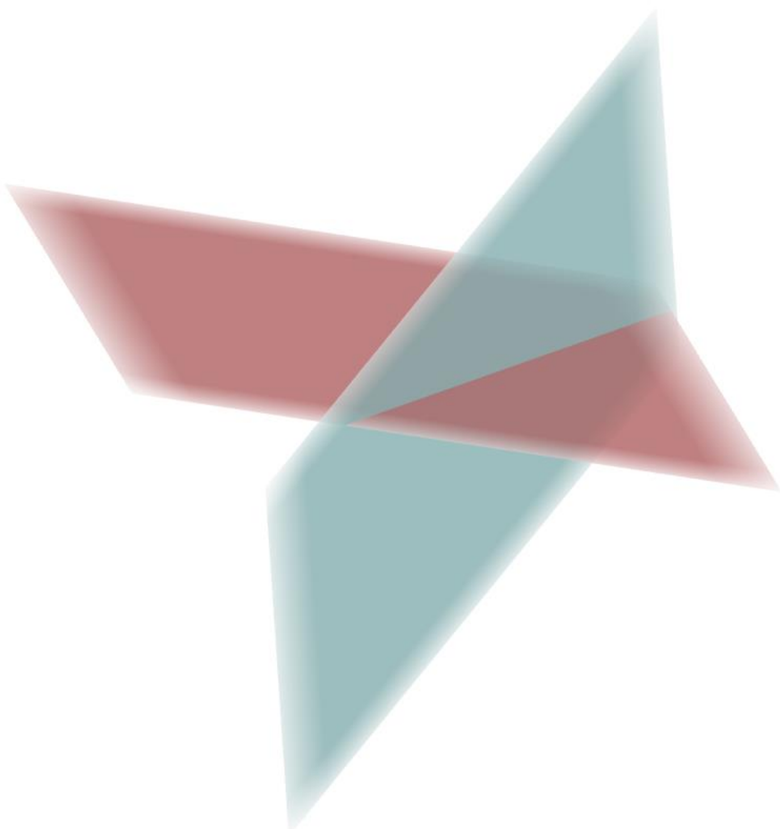

Figura 4. Representación gráfica de la posición relativa entre ambos planos

b) $\left.\begin{array}{l}\vec{n}_{\pi_1}=(2,-1,2)\\ \vec{n}_{\pi_3}=(-2,1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2}{-2}=\frac{-1}{1}=\frac{2}{-2}$ los vectores normales son proporcionales, pero no son proporcionales los términos independientes, es decir, los planos son paralelos. Para calcular la distancia entre ellos, se elige un punto cualquiera de un plano y se calcula la distancia de ese punto al otro plano. El punto elegido es $P(0,0,0)$ que pertenece al plano π_3. Se calcula la recta que pasa por el punto P y tiene como vector director $\vec{n}_{\pi_1}$. La intersección de dicha recta con el plano π_1 es el punto Q y la distancia entre los dos planos es la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Por lo tanto, la ecuación continua de dicha recta es $r:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ y sus ecuaciones implícitas son:

$$r:\begin{cases} x-z=0\\ x+2y=0\end{cases}$$

El punto de corte entre la recta y el plano π_1 se obtiene resolviendo el sistema $\begin{cases} x-z=0\\ x+2y=0\\ 2x-y+2z=5\end{cases}$ utilizando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&2&0&0\\2&-1&2&5\end{pmatrix}\underset{f_3\leftarrow f_3-2f_1}{\overset{f_2\leftarrow f_2-f_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&2&1&0\\0&-1&4&5\end{pmatrix}\overset{f_2\leftrightarrow f_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&4&5\\0&2&1&0\end{pmatrix}\overset{f_3\leftarrow f_3+2f_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&4&-5\\0&0&9&10\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es la solución de su sistema equivalente

$$\begin{cases} x-z=0\\ -y+4z=5\\ 9z=10\end{cases}$$

De esta forma su solución es: $\begin{cases} x=\frac{10}{9}\\ y=\frac{-5}{9}\\ z=\frac{10}{9}\end{cases}$.

El punto de corte es $Q=\left(\frac{10}{9},\frac{-5}{9},\frac{10}{9}\right)$ y la distancia entre planos es

$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\left\|\left(\frac{10}{9},\frac{-5}{9},\frac{10}{9}\right)\right\|=\sqrt{\left(\frac{10}{9}\right)^2+\left(\frac{-5}{9}\right)^2+\left(\frac{10}{9}\right)^2}=\frac{5}{3}$ unidades.

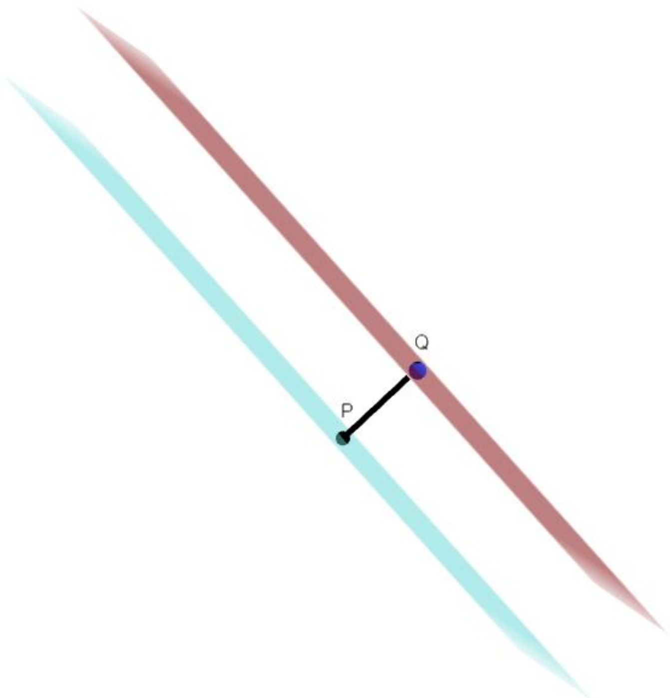

Figura 5. Representación gráfica de la posición relativa entre ambos planos

EJERCICIO 3:

Dados el punto $P(1,-2,-1)$, el plano π: $2x-2z=0$ y la recta $r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$.

a) Calcula el punto simétrico de P respecto al plano π.

b) Calcula el punto simétrico de P respecto a la recta r .

Solución:

a) Se comprueba que el punto $P(1,-2,-1)$ no pertenece al plano, es decir al sustituir sus coordenadas en el plano no verifica su ecuación, $2+2\neq 0$. A continuación, se calcula la proyección ortogonal de dicho punto en el plano. Para ello, se construye la recta t perpendicular al plano que pasa por el punto P. El vector director de la recta será el vector normal del plano.

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$t:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-2 \\ z=-1-2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

A continuación, se calcula el punto de corte entre la recta t y el plano π

$2(1+2\lambda)-2(-1-2\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-1}{2} \Rightarrow$ el punto de corte es $Q=(0,-2,0)$

Si P' es el punto simétrico del punto P verifica que Q es el punto medio del segmento PP', es decir, se debe cumplir que $\frac{P+P'}{2}=Q$. Como consecuencia,

$$\frac{(1,-2,-1)+(x,y,z)}{2}=(0,-2,0) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el punto simétrico a P respecto al plano π es $P'(-1,-2,1)$.

En la siguiente figura se puede apreciar el punto simétrico del punto P respecto a la recta r .

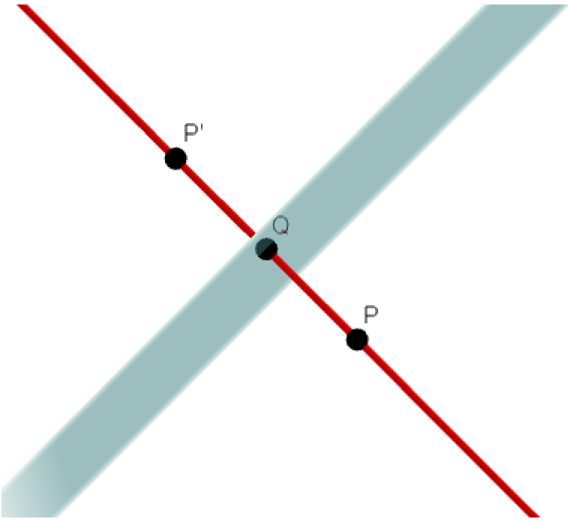

Figura 6. Representación gráfica del punto simétrico respecto al plano

b) Para calcular el punto simétrico de $P(1,-2,-1)$ respecto de la recta r , se comprueba primero si el punto pertenece a la recta. Como dicho punto no verifica la segunda ecuación implícita de la recta, es decir, $1-2(-1)\neq 0$, entonces se deduce que el punto no pertenece a la recta. Para obtener el punto simétrico, se empieza calculando la proyección ortogonal del punto sobre la recta. Para ello, se construye el plano π_1 que es perpendicular a la recta que pasa por P . El punto de corte entre plano y recta P' será dicha proyección ortogonal.

Como el plano π_1 es perpendicular a la recta, la ecuación implícita del plano será $\pi_1 : 2x-y+z+D=0$. Al pertenecer el punto P al plano, se puede determinar el coeficiente D sustituyendo sus coordenadas en el plano. De esta forma se obtiene $\pi_1 : 2x-y+z-3=0$.

El punto de corte entre plano y recta se calcula resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones implícitas $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-2z=0 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$ mediante el sistema de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{f_2\leftarrow f_2-f_1}{\scriptstyle f_3\leftarrow f_3-2f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{f_3\leftarrow f_3-3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y-z=0 \\ 6z=3 \end{cases}$$

Por lo tanto , la solución del sistema es: $\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{-1}{2} \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Procediendo de forma análoga al apartado anterior, la proyección ortogonal Q será el punto medio del segmento PP' es decir , $\dfrac{P+P'}{2}=Q$

$$\frac{(1,-2,-1)+(x,y,z)}{2}=\left(1,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

El punto simétrico de P respecto a la recta será $P'(1,1,2)$.

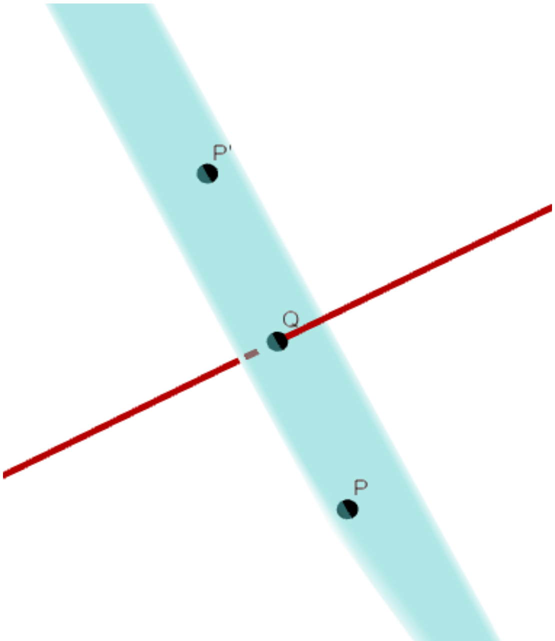

Figura 7. Representación gráfica del punto simétrico respecto a la recta

EJERCICIO 4:

Calcula la distancia entre las siguientes rectas:

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1+4\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = z$ y $t \equiv x = y = z$

Solución:

a) Se calcula la posición relativa entre las rectas r y s.

Los vectores directores de r y s son respectivamente $\vec{u} = (2,2,1)$ y $\vec{v} = (4,4,2)$. Como los vectores son proporcionales ($\vec{v} = 2\vec{u}$) y $P = (1,2,0) \in r$ verifica que $P \notin s$ entonces las rectas son paralelas.

Para calcular la distancia entre las dos rectas se construye el plano perpendicular a la recta que pasa por P.

$$\pi \equiv \begin{cases} P \in r \Rightarrow P = (1,2,0) \\ r \perp \pi \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_\pi \end{cases}$$

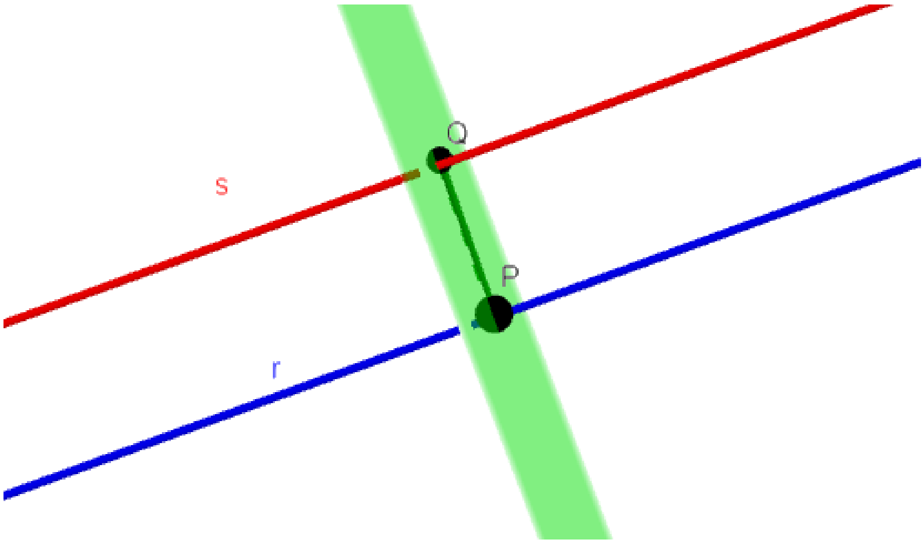

Figura 8. Representación gráfica de la posición relativa entre ambas rectas

La ecuación del plano π es:

$$2x+2y+z+D=0$$

Para determinar el coeficiente D, se sustituyen las coordenadas del punto P en la ecuación del plano porque como $P\in r \Rightarrow 2+4+D=0 \Rightarrow D=-6$

Entonces, $\pi \equiv 2x+2y+z-6=0$

Se calcula el punto de corte Q entre la recta s y el plano π.

$$Q\equiv\begin{cases}\pi\equiv 2x+2y+z-6=0\\ s\equiv\begin{cases}x=-1+4\lambda\\ y=4\lambda \qquad\qquad \forall\lambda\in\mathbb{R}\\ z=1+2\lambda\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&2(-1+4\lambda)+2(4\lambda)+(1+2\lambda)-6=0\\ &-2+8\lambda+8\lambda+1+2\lambda-6=0\\ &18\lambda=7\Rightarrow\lambda=\frac{7}{18}\end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto Q son:

$$\begin{aligned}x&=-1+\frac{28}{18}=\frac{5}{9}\\ y&=4\frac{7}{18}=\frac{14}{9}\\ z&=1+\frac{14}{18}=\frac{16}{9}\end{aligned}$$

Entonces la distancia entre las dos rectas es la distancia entre los puntos P y Q:

$d(r,s)=d(P,Q)=\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ unidades.

b) Se calcula la posición relativa entre las rectas r y t.

Los vectores directores delas rectas r y t son respectivamente $\vec{u}=(2,2,1)$ y $\vec{w}=(1,1,1)$. Como los vectores no son proporcionales, las rectas o se cruzan o se cortan. Para ello, se toma un punto $P=(1,2,0)$ de la recta r y un punto

$F=(0,0,0)$ de la recta t. Si los vectores $\overrightarrow{PF}=(-1,-2,0)$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son coplanarios, las rectas se cortan, en caso contrario se cruzan. Para ello, se calcula el rango de la matriz determinada por los tres vectores.

$$h\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=3$$

$$\Uparrow$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2-2+1+4\neq 0$$

Por lo tanto, las rectas se cruzan. Para calcular la distancia entre las dos rectas, se determinan los puntos A y B tales que la recta que pase por dichos puntos es perpendicular a las rectas r y t.

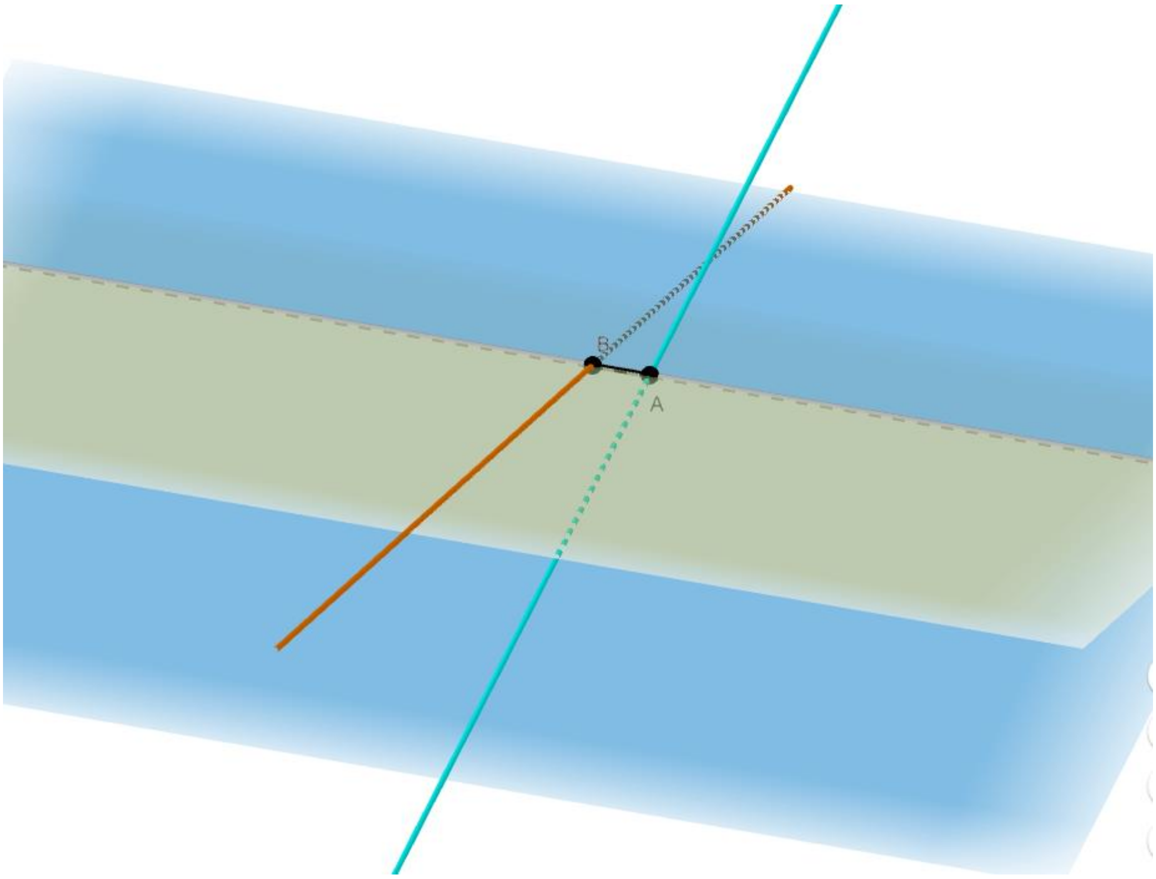

Figura 9. Representación gráfica de la posición relativa entre ambas rectas

$$
\begin{aligned}
&A\in r \Rightarrow A=(1+2\lambda,2+2\lambda,\lambda)\\
&B\in t \Rightarrow B=(\mu,\mu,\mu)\\
&\overrightarrow{AB}=(\mu-1-2\lambda,\mu-2-2\lambda,\mu-\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\perp\vec{u} \Rightarrow\ & 2(\mu-1-2\lambda)+2(\mu-2-2\lambda)+(\mu-\lambda)=0\\
& 2\mu-2-4\lambda+2\mu-4-4\lambda+\mu-\lambda=0\\
& 5\mu-9\lambda-6=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\perp\vec{w} \Rightarrow\ & (\mu-1-2\lambda)+(\mu-2-2\lambda)+(\mu-\lambda)=0\\
& 3\mu-5\lambda-3=0
\end{aligned}
$$

Entonces resolvemos el sistema $\begin{cases}5\mu-9\lambda-6=0\\3\mu-5\lambda-3=0\end{cases}$.

$$
\begin{cases}5\mu-9\lambda-6=0\Rightarrow 15\mu-27\lambda-18=0\\3\mu-5\lambda-3=0\Rightarrow -15\mu+25\lambda+15=0\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow -2\lambda-3=0\Rightarrow \lambda=\frac{-3}{2}
$$

$$
\Rightarrow 3\mu+\frac{15}{2}=3\Rightarrow \mu=\frac{-3}{2}
$$

Por lo tanto, la distancia entre las dos rectas es la distancia entre los puntos A y B: $d(r,t)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ y $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)\Rightarrow\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$