E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BLOQUE A-IV: Sistemas de ecuaciones lineales

EJERCICIO 1:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

a) Haciendo uso de la regla de Cramer.

b) Haciendo uso del método de Gauss.

Solución:

a) Primero, se expresa el sistema en forma matricial, matriz de coeficientes (*A*) y matriz ampliada (*AM*):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } AM = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se aplica la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + 12 - (9 + 2)}{2 + 6 + 6 - (4 + 18 + 1)} = -\frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4 + 6 - (8 + 1)}{(-9)} = -\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{9}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4+3-(2+12)}{(-9)}=\frac{7}{9} \quad \Rightarrow \quad z=\frac{7}{9}$$

Por lo tanto, el sistema es compatible determinado cuya solución es:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=-\dfrac{2}{9} \\ y=-\dfrac{1}{9} \\ z=\dfrac{7}{9} \end{cases}$$

b) El sistema se representa en forma matricial a través de la matriz ampliada (*AM*) sobre la que se realizan operaciones elementales entre filas para lograr una matriz escalonada:

$$AM=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-2F_1\\ F_3-2F_1}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -4 & -3\\ 0 & 1 & -5 & -4\end{pmatrix} \underset{F_3+F_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -4 & -3\\ 0 & 0 & -9 & -7\end{pmatrix}$$

Se expresa la matriz escalonada como sistema de ecuaciones y resolvemos partiendo desde la última ecuación hasta llegar a la primera:

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \quad \Rightarrow \quad x-\dfrac{1}{9}+3\dfrac{7}{9}=2 \Rightarrow x=2-\dfrac{20}{9} \Rightarrow x=-\dfrac{2}{9} \\ -y-4z=-3 \quad \Rightarrow \quad -y-4\dfrac{7}{9}=-3 \Rightarrow y=3-\dfrac{28}{9} \Rightarrow y=-\dfrac{1}{9} \\ -9z=-7 \quad \Rightarrow \quad z=\dfrac{7}{9} \end{cases}$$

Se llega a la misma solución que en el apartado a:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=-\dfrac{2}{9} \\ y=-\dfrac{1}{9} \\ z=\dfrac{7}{9} \end{cases}$$

La figura 1 muestra la interpretación gráfica del resultado. Los planos $2x+y+2z=1$, $x+y+3z=2$, y $2x+3y+z=0$ están coloreados en amarillo, magenta y cian, respectivamente.

Al tratarse de un sistema compatible determinado existe un único punto de intersección entre los tres planos que se corresponde con el punto negro de la figura.

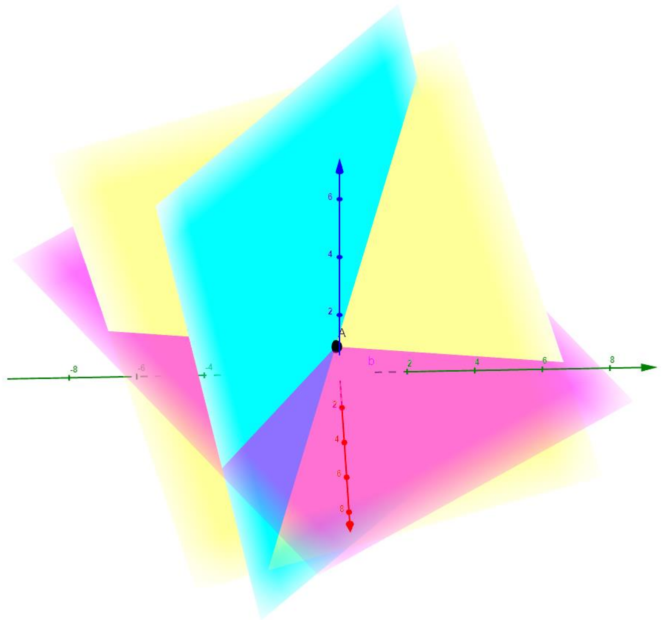

Figura 1. Representación gráfica del sistema compatible determinado de ecuaciones lineales.

EJERCICIO 2:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -x+2y-z=-2 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

Solución:

Primero, se expresa el sistema en forma matricial y se identifican la matriz de coeficientes (*A*) y matriz ampliada (*AM*):

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad AM = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss a la matriz ampliada, obtenemos un sistema equivalente expresado como una matriz escalonada:

$$AM = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+2F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\sim}$$

$$\underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_3-2F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por el teorema de Rouche-Frobenius, para resolver el sistema de ecuaciones lineales, debemos analizar el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada. Lo haremos utilizando la matriz equivalente obtenida:

r(*A*)=2, dado que: $r\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2$

r(*AM*)=3, dado que: $r\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=3$

r(*A*)≠ r(*AM*), por lo que el sistema es incompatible.

En la figura 2 se observa que no existe ningún punto de intersección entre los tres planos:

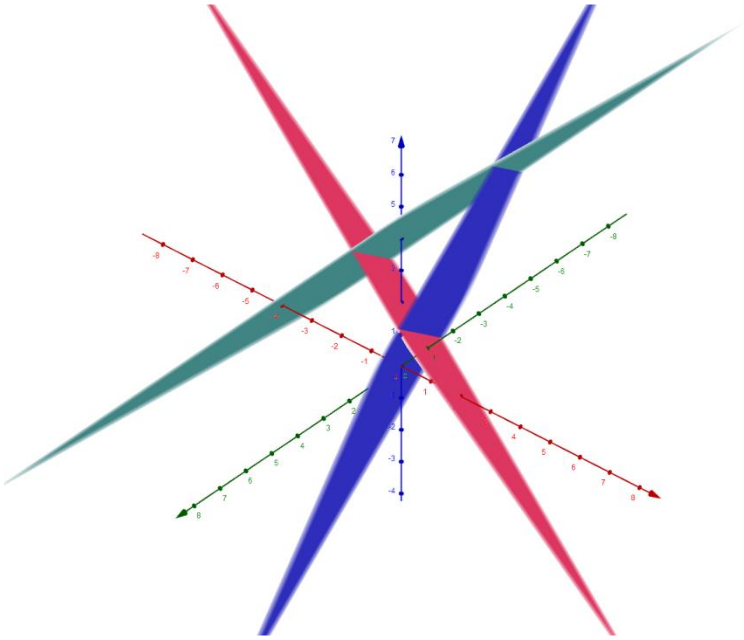

Figura 2. Representación gráfica del sistema incompatible de ecuaciones lineales.

EJERCICIO 3:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ -x+2z=1 \\ 2x+2y-z=-1 \end{cases}$$

Solución:

Expresamos el sistema en su forma matricial y definimos la matriz de coeficientes (*A*) y la matriz ampliada (*AM*)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando operaciones elementales por filas, obtenemos una matriz ampliada equivalente, que a su vez representa un sistema de ecuaciones lineales equivalente al inicial:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-2F_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2/2 \\ F_3/3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser la última columna nula, el rango de la matriz *A* y de *AM* es dos, pero menor al número de incógnitas que es tres, por lo que el sistema es compatible indeterminado y existirán infinitas soluciones.

Resolviendo el sistema de ecuaciones equivalente:

$$\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1-4z \\ y=1-3z \end{cases} \Rightarrow x+2(1-3z)=1-4z \quad \Rightarrow x=2z-1$$

Así, se ha obtenido la siguiente solución:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x=2z-1 \\ y=1-3z \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La interpretación gráfica (figura 3) muestra las infinitas soluciones de este sistema mediante la recta que interseca los tres planos:

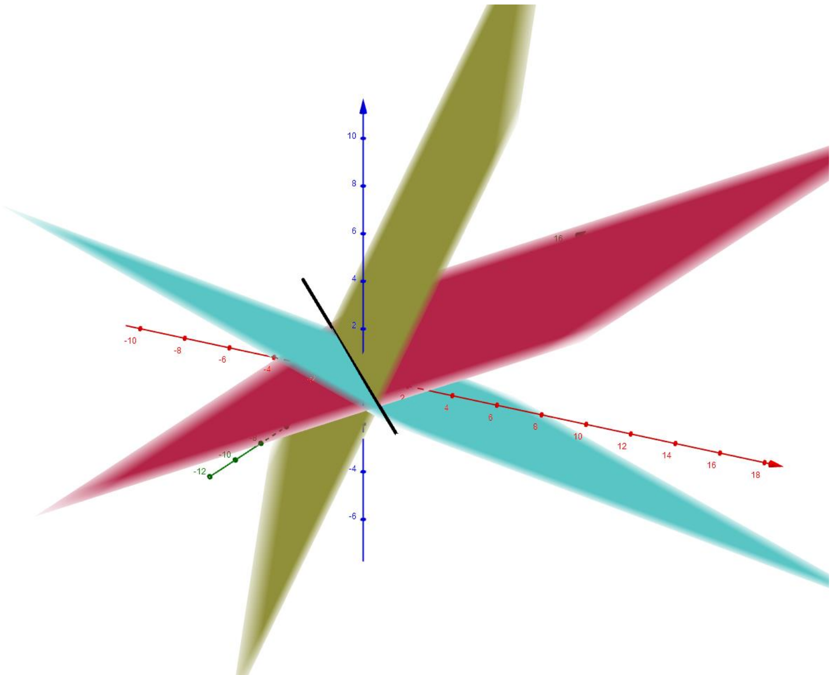

Figura 3. Representación gráfica del sistema compatible indeterminado de ecuaciones lineales.