BLOQUE A-II: Matrices y determinantes – Matriz adjunta, determinante e inversa

EJERCICIO 1:

Sea la matriz *A*:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz adjunta de la matriz *A*

b) Obtén el determinante de la matriz *A* mediante el desarrollo por filas o columnas de la misma.

c) Calcula matriz inversa de la matriz *A*, (A^{-1}).

Solución:

a) Primero se debe calcular el elemento adjunto de cada elemento de la matriz *A*, es decir, se deben obtener el menor y el signo correspondiente a cada elemento:

$$A^{*}=\begin{pmatrix} (+1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ (+1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=$$

CC BY NC SA

$$= \begin{pmatrix} 81 & -96 & 218 & -99 \\ 97 & 178 & -4 & 7 \\ -108 & 128 & 86 & 132 \\ 131 & 54 & -52 & 91 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta es la traspuesta de la matriz anterior:

$$A^a = \left(A^*\right)^t = \begin{pmatrix} 81 & 97 & -108 & 131 \\ -96 & 178 & 128 & 54 \\ 218 & -4 & 86 & -52 \\ -99 & 7 & 132 & 91 \end{pmatrix}$$

b) Mediante el desarrollo de la primera columna se tiene que el determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31} + a_{41}\cdot A_{41}$$

siendo a_{ij} el elemento de la matriz *A* que ocupa la posición *(i,j)* y A_{ij} su elemento adjunto.

Por tanto, sustituyendo los valores se tiene que:

$$|A| = 2\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(81) + 1\cdot(97) + (-2)\cdot(-108) + 5\cdot(131) = 1130$$

Si se selecciona otra columna para calcular el determinante, obtenemos el mismo valor. Por ejemplo, a continuación, se obtiene el valor del determinante utilizando para ello el desarrollo mediante la tercera columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33} + a_{43}\cdot A_{43} =$$

$$= 4\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(218) + 0 + 3\cdot(86) + 0 = 1130$$

Además, si se utiliza la segunda columna para obtener el determinante se tiene el siguiente desarrollo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{24}\cdot A_{24} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 6\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(97) + 6\cdot(178) + 0\cdot(-4) + (-5)\cdot(7) = 1130$$

Se concluye que para obtener el determinante se puede utilizar cualquier columna o fila de matriz, siendo su valor siempre el mismo.

c) La fórmula para obtener la matriz inversa de la matriz *A* es:

$$A^{-1} = \frac{A^a}{|A|}$$

Es decir, para obtener la matriz inversa de matriz *A* basta dividir su matriz adjunta por el determinante de la misma.

En el apartado a) del ejercicio se ha calculado la matriz adjunta de matriz *A* y en el apartado b) se ha obtenido el determinante de la matriz *A*. Por tanto, sustituyendo dichos valores en la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{A^a}{|A|} = \frac{1}{1130}\cdot\begin{pmatrix} 81 & 97 & -108 & 131 \\ -96 & 178 & 128 & 54 \\ 218 & -4 & 86 & -52 \\ -99 & 7 & 132 & 91 \end{pmatrix}$$

Finalmente mencionar que, si una constante multiplica o divide una matriz, dicha constante multiplica o divide cada elemento de la matriz.

EJERCICIO 2:

Calcula la matriz inversa de la matriz *A* utilizando para ello el método de Gauss-Jordan:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

El método de Gauss-Jordan transforma un sistema $(A\,|\,I)$ en otro equivalente $(I\,|\,A^{-1})$ utilizando para ello operaciones elementales por filas, es decir:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Primero intentaremos convertir el elemento $a_{11}=2$ en un 1. Por ejemplo, se puede dividir la primera fila por 2, o se pueden intercambiar la primera y la segunda fila. En este caso aplicaremos la segunda opción:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1\leftrightarrow F2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A continuación, deben anularse los elementos de la primera columna que no estén en la diagonal principal, es decir, $a_{21}=2$ y $a_{31}=-2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F2\leftarrow F2-2F1 \\ F3\leftarrow F3+2F1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Se repite el proceso. Es decir, se obtiene un 1 en el segundo elemento de la diagonal principal $a_{22}=-13$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2\leftarrow F2/(-13)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

CC BY NC SA

A continuación, se anulan los elementos de la segunda columna que no están en la diagonal principal, es decir, $a_{12}=6$ y $a_{32}=13$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3 \leftarrow F3-13F2]{F1 \leftarrow F1-6F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 24/13 & 6/13 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se aplica el mismo proceso en la tercera columna. Primero, se obtiene un 1 en el tercer elemento de la diagonal principal,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 24/13 & 6/13 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 \leftarrow F3/7} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 24/13 & 6/13 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 0 & 1/7 \end{array}\right)$$

Y realizando operaciones elementales por filas se anulan los elementos, $a_{13}=24/13$ y $a_{23}=-4/13$, elementos que no pertenecen a la diagonal principal.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 24/13 & 6/13 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 0 & 1/7 \end{array}\right) \xrightarrow[F2 \leftarrow F2+4/13F3]{F1 \leftarrow F1-24/13F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 18/(13\cdot 7) & 1/13 & -24/(13\cdot 7) \\ 0 & 1 & 0 & -3/(13\cdot 7) & 2/13 & 4/(13\cdot 7) \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 0 & 1/7 \end{array}\right)$$

Finalmente, se identifica la matriz inversa,

$$(A \mid I) \rightarrow (I \mid A^{-1})$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 18/(13\cdot 7) & 1/13 & -24/(13\cdot 7) \\ -3/(13\cdot 7) & 2/13 & 4/(13\cdot 7) \\ 1/7 & 0 & 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1978 & 0.0769 & -0.2637 \\ 0.0330 & 0.1539 & 0.0440 \\ 0.1429 & 0 & 0.1429 \end{pmatrix}$$