E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BLOQUE A-II: Matrices y determinantes – Determinante

EJERCICIO 1:

Calcular los siguientes dos determinantes aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$

Para resolver el determinante aplicando el método de Gauss debemos aplicar las propiedades de los determinantes para hacer el determinante triangular, esto es, hacer todos los elementos por debajo de la diagonal principal 0.

En este caso no tenemos un 1 como pivote pero se ve claramente que para hacer 0 todos los elementos de la primera columna debajo de la primera columna basta con restar a cada fila la primera fila:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & x-a & x-b & f-c \\ 0 & x-a & x-b & x-c \end{vmatrix}$$

Ahora pasamos a hacer 0 los elementos de la segunda columna que estén debajo de la diagonal principal. Para ello, restamos a cada fila la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & x-a & x-b & f-c \\ 0 & x-a & x-b & x-c \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3-F_2 \\ F_4-F_2}}{=} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & x-d & x-e \end{vmatrix}$$

Del mismo modo ahora restamos a la cuarta fila la tercera fila para que todos los elementos de la tercera columna debajo de la diagonal principal se hagan 0:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & x-d & x-e \end{vmatrix} \underset{F_4-F_3}{=} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & 0 & x-f \end{vmatrix}$$

Para finalizar, al ser un determinante triangula, el valor del determinante será la multiplicación de todos los términos de la diagonal:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & 0 & x-f \end{vmatrix} = x\cdot(x-a)\cdot(x-d)\cdot(x-f)$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

Como en el caso anterior restamos a todas las filas la fila 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1}-F_1 \\ F_n-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

Directamente hemos conseguido tener 0-s debajo de la diagonal principal y por tanto el valor del determinante se conseguirá multiplicando los elementos de la diagonal:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot (n-1) = (n-1)!$$

<u>EJERCICIO 2:</u>

Calcula los siguientes dos determinantes utilizando el método de Gauss.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Para resolver el determinante utilizando el método de Gauss debemos aplicar las propiedades de los determinantes para convertir el determinante en triangular. Es decir, debemos hacer 0 todos los elementos debajo de la diagonal principal.

Aplicaremos las propiedades vistas en la teoría, primero para conseguir que el pivote sea 1 y luego para hacer 0 los elementos debajo de la diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_1 \longleftrightarrow C_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-3F_1 \\ F_4-6F_1}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & -1 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \\ 0 & -14 & -25 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_4 \longleftrightarrow C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -12 & -3 \\ 0 & -3 & -25 & -14 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -12 & -3 \\ 0 & -3 & -25 & -14 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3-F_2 \\ F_4-3F_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{vmatrix} \underset{F_4 \longleftrightarrow F_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 11 \cdot 1 = 11$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Para resolver el determinante utilizando el método de Gauss debemos aplicar las propiedades de los determinantes para convertir el determinante en triangular. Es decir, debemos hacer 0 todos los elementos debajo de la diagonal principal.

Aplicaremos las propiedades vistas en la teoría para hacer 0 los elementos debajo de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3-3F_1 \\ F_4-6F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -15 & -10 & -5 \end{vmatrix} \underset{\frac{1}{5}\cdot F_4}{=} 5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_3+F_2 \\ F_4+F_2}}{=} 5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_4 \longleftrightarrow F_3}{=} -5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{F_4+2F_3}{=} -5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 1 = -15$$