E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BLOQUE A-II: Matrices y determinantes - Rango

EJERCICIO 1:

Calcula el rango de la siguiente matriz utilizando dos métodos distintos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz no es nula y tiene 3 filas y 4 columnas, por lo tanto, sabemos que $1 \leq rg(a) \leq 3$.

Primero vamos a calcular el rango orlando la matriz. Para ello cogemos un determinante de 2x2 que sea diferente de 0:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$$

Ahora orlamos la matriz con la tercera fila y la tercera columna y comprobamos si su determinante es 0:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 - 4 - (-10 - 1 + 8) = 0$$

Este determinante es 0, pero tenemos otra opción, orlar la matriz con la tercera fila y la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 4 - (-30 + 1 + 0) = 21 \neq 0$$

Por tanto, rg(A)=3

Ahora vamos a calcular el rango utilizando el método de Gauss, para ello aplicamos las propiedades que hemos aprendido:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+4F_1 \\ F_3+2F_1}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3-F_2}{=} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

No hay ninguna fila en la que todos los elementos sean 0, por tanto rg(A)=3, el número total de filas.

EJERCICIO 2:

Calcular el rango de la siguiente matriz en función del parámetro a:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Vemos que la matriz no es nula por tanto rg(A)≥1.

Tiene 3 filas y 4 columnas, por tanto, podemos asegurar que rg(A)≤3.

Ahora buscamos una matriz de 2x2 cuyo determinante sea diferente de 0:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-2=2\neq 0$$

Como hemos encontrado esto, podemos decir que 2≤ rg(A)≤3.

No hay ningún determinante de 3x3 donde el parámetro a no intervenga, por tanto, tenemos que calcular las matrices de 3x3 en función de ese parámetro. En lugar de analizar todas las posibilidades orlamos el determinante de 2x2 que hemos utilizado previamente.

Para ello orlamos en primer lugar con la fila 1 y la columna 2 y miramos para qué valor de a se anula el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2+4+2-(4a+a+4)=2a^2-5a+2$$

$$2a^2-5a+2=0 \Rightarrow a=2 \quad o \;\; bien \quad a=\frac{1}{2}$$

Ahora orlamos con la primera fila y la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a^3+4+2-(4a^2+a+4)=2a^3-4a^2-a+2$$

$$2a^3 - 4a^2 - a + 2 = 0 = (a-2)(2a^2 - 1) \Rightarrow a = 2 \quad o\ bien \quad a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Las dos determinantes solo se anulan al mismo tiempo cuando a=2:

Cuando a =2 el rg(A) = 2 y cuando a≠2 entonces rg(A)=3.