BLOQUE C-V: Cálculo de integrales básicas - Integración de funciones racionales

EJERCICIO 1:

Calcular la siguiente integral indefinida mediante la técnica de completar el cuadrado:

$$\int \frac{x+1}{4x^2-4x+5}\,dx$$

Solución:

Comenzamos observando que el grado del numerador (uno) es inferior al grado del denominador (dos), por lo que no es necesario efectuar divisiones. Utilizando la fórmula para la ecuación de segundo grado (conocida por la humanidad hace más de 4000 años), tenemos

$$4x^2-4x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4\pm\sqrt{16-80}}{8}.$$

El discriminante es negativo, por lo que no hay raíces reales. En estos casos se puede utililizar la técnica de compleción del cuadrado, es decir, aprovechar la celebérrima identidad

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \tag{1}$$

para lograr una expresión de este tipo:

$$A(x+B)^2+C, \quad A,B,C\in\mathbb{R} \tag{2}$$

la cual, como veremos, facilitará el cálculo de la integral.

A modo de entrenamiento, manipularemos con el mismo objetivo el polinomio

$$x^2+2x+2. \tag{3}$$

Debería de saltarnos a la vista (con un poco de experiencia, acabará ocurriéndonos eso) que x^2+2x forma parte del cuadrado perfecto $(x+1)^2=x^2+2x+1$, de modo que tenemos

$$x^2+2x+2=(x^2+2x+1)+1=(x+1)^2+1,$$

con lo que llegamos fácilmente a una expresión del tipo (2).

Volviendo al polinomio $4x^2-4x+5$, observamos que, al contrario que (3), no es mónico, por lo que como primer paso, sacaremos el coeficiente cuadrático (el que acompaña a x^2) como factor común, involucrando a todos los términos con x:

$$4x^2-4x+5=4(x^2-x)+5$$

No será necesario sacar factor común al término independiente, por lo que nos centramos ahora en reescribir la expresión entre paréntesis (x^2-x) como un cuadrado perfecto. Según (1), tenemos:

$$(x+B)^2=x^2+2Bx+B^2,$$

por lo que si queremos que $x^2 + 2Bx = x^2 - x$, hemos de tomar $B = -\frac{1}{2}$. Volviendo a la expresión (2), tenemos por ahora:

$$4(x - \tfrac{1}{2})^2 + C = 4(x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + C = 4x^2 - 4x + 1 + C$$

por lo que para obtener $4x^2 - 4x + 5$ hemos de tomar $C = 4$. Recapitulando, tenemos

$$4x^2 - 4x + 5 = 4(x - \tfrac{1}{2})^2 + 4,$$

y sustituyendo, nuestra integral se vuelve

$$I = \int \frac{x+1}{4x^2 - 4x + 5}\, dx = \int \frac{x+1}{4(x - \frac{1}{2})^2 + 4}\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{x+1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1}\, dx \tag{4}$$

Manipulamos ahora la fracción para obtener sumandos fácilmente integrables en forma de derivadas de logaritmos y de arcos tangentes (p'/p y $u'/(1+u^2)$, respectivamente). Es conveniente arreglar primero la parte logarítmica y después la del arco tangente. Para eso, derivamos el denominador

$$\frac{d}{dx}[(x - \tfrac{1}{2})^2 + 1] = 2(x - \tfrac{1}{2}) = 2x - 1$$

e intentamos que esa expresión aparezca, como sea, en el numerador, ajustando el término independiente a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 1 + 3}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1}. \end{aligned}$$

Por (4), tenemos

$$I = \frac{1}{8} \int \frac{2x-1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1}\, dx + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1},$$

siendo estas dos últimas integrales inmediatas. La solución es:

$$I = \frac{1}{8} \,\mathrm{L}\, |(x - \tfrac{1}{2})^2 + 1| + \frac{3}{8} \arctan(x - \tfrac{1}{2}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 2:
Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x-9}{x(x+3)^2}\,dx$$

Solución:

Comenzamos observando que el grado del numerador (uno) es inferior al grado del denominador (tres), por lo que no es necesario efectuar divisiones. El denominador está factorizado, y podemos plantear la siguiente descomposición canónica en fracciones simples del integrando:

$$\frac{x-9}{x(x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}. \tag{5}$$

Para determinar los parámetros reales A, B y C, reducimos a común denominador:

$$\frac{x-9}{x(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2}{x(x+3)^2} + \frac{Bx(x+3)}{x(x+3)^2} + \frac{Cx}{x(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx}{x(x+3)^2},$$

de donde deducimos, igualando los numeradores,

$$x - 9 = A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}.$$

La manera más segura de determinar los parámetros A, B y C es igualar los coeficientes de los polinomios que aparecen a ambos lados de la igualdad. Para eso, desarrollamos y agrupamos según en grado los términos de la derecha de la igualdad:

$$\begin{aligned} x - 9 &= Ax^2 + 6Ax + 9A + Bx^2 + 3B + Cx \\ &= (A+B)x^2 + (6A+3B+C)x + 9A, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}. \end{aligned}$$

Igualando ahora los coeficientes de ambos polinomios, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 & \text{(coeficientes cuadráticos)} \\ 6A + 3B + C = 1 & \text{(coeficientes lineales)} \\ 9A = -9 & \text{(coeficientes independientes.)} \end{cases}$$

La solución del sistema es inmediata: $A = -1, B = 1$ y $C = 4$, lo que nos lleva a completar la descomposición planteada en (5):

$$\frac{x-9}{x(x+3)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{4}{(x+3)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\},$$

de modo que sustituyendo en la integral, tenemos, por linealidad,

$$I = \int \frac{x-9}{x(x+3)^2}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{4}{(x+3)^2}\,dx,$$

y resolviendo esas integrales inmediatas, obtenemos la solución:

$$\begin{aligned} I &= -\operatorname{L}|x| + \operatorname{L}|x+3| - \frac{4}{x+3} + K \\ &= \operatorname{L}\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{4}{x+3} + K, \quad \forall K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}. \end{aligned}$$