E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

BLOQUE C-V: Cálculo de integrales básicas - Integración por Partes

EJERCICIO 1:

Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int e^x \sin x \, dx$$

Solución:

El integrando es el producto de las funciones e^x y $\sin x$, ambas fáciles tanto de integrar como de derivar. Aplicando la integración por partes, tenemos:

$$\int e^x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u = \sin x & du = \cos x \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx. \qquad (1)$$

La nueva integral no es inmediata, pero si integramos por partes, obtenemos:

$$\int e^x \cos x \, dx = \begin{vmatrix} u = \cos x & du = -\sin x \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx. \qquad (2)$$

Sustituyendo ahora (2) en (1), tenemos

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &\overset{(1)}{=} e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ &\overset{(2)}{=} e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right) \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Ahora, podemos despejar fácilmente la integral que buscamos, pues aparece a ambos lados de la igualdad:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Ya tenemos la primitiva deseada. Ahora, aprovechando los cálculos realizados, obtenemos fácilmente el cálculo de otra primitiva. En efecto,

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &\overset{(2)}{=} e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx + \\ &\overset{(3)}{=} e^x \cos x + e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C = e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

"El Álgebra es generosa: a menudo da más de lo que se le pide."

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

EJERCICIO 2:
Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

Solución:

Vamos a utilizar el hecho de que

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

para aplicar la integración por partes.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \left| \begin{matrix} u = \dfrac{1}{\cos^2 x} & du = 2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx & v = \tan x \end{matrix} \right| \\
&= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \tan x \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

Desarrollemos, aparte, esa última integral, utilizando que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx &= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx \\
&= \int \frac{dx}{\cos^4 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x} - \tan x.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, combinando (4) y (5), obtenemos

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2\left(\int \frac{dx}{\cos^4 x} - \tan x\right).$$

Para terminar, despejamos la integral deseada:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + 2\tan x\right) + C, \quad \forall x \notin \{\,(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\,\}, C \in \mathbb{R}$$

Es decir, esa primitiva está definida para todo x real, salvo para los valores

$$\left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots \right\}.$$