E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BLOQUE C-IV: Derivabilidad y cálculo de derivadas básicas

EJERCICIO 1:

Calcula la derivada de la siguiente función:

$$y(x) = x \cdot e^{\sin(x^2)}$$

Solución:

Lo primero que se puede comprobar es que la función $y(x)$ está compuesta por otras dos funciones que se multiplican. Esto es:

$$y(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x^2)}}_{v(x)}$$

Como las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son derivables para cualquier valor de x ,la multiplicación entre ellas también será derivable. Por lo tanto se puede calcular la derivada de la función $y(x)$ de la siguiente manera:

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Se empieza por calcular $u'(x)$ y $v'(x)$. La derivada de la función $u(x) = x$ es inmediata:

$$u'(x) = 1$$

Por otro lado la función $v(x) = e^{\sin(x^2)}$, es una función compuesta y se deriva de la siguiente manera:

$$v'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

El siguiente paso es sustituir la expresión de cada una de las funciones en la ecuación $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, con lo que queda:

$$y'(x) = 1 \cdot e^{\sin(x^2)} + x \cdot e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

Para finalizar, haremos ciertas operaciones en el segundo sumando para simplificar la función resultante:

$$y'(x) = e^{\sin(x^2)} + 2x^2 \cdot e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2)$$

EJERCICIO 2:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$y(x)=\cos^3(2x+1)\cdot e^{-x^4}$$

Solución:

Lo primero que hay que diferenciar es que la función $y(x)$ está compuesta por la multiplicación de otras dos funciones:

$$y(x)=\underbrace{\cos^3(2x+1)}_{u(x)}\cdot\underbrace{e^{-x^4}}_{v(x)}$$

Las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son derivables para cualquier valor de x, por lo tanto, la multiplicación de las mismas será derivable también. Teniendo esto en cuenta, la derivada de la función $y(x)$ se calcula de la siguiente manera:

$$y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

Comenzaremos calculando $u'(x)$ y $v'(x)$. La función $u(x)=\cos^3(2x+1)$ es compuesta, por lo tanto su derivada será la siguiente:

$$u'(x)=3\cdot\cos^2(2x+1)\cdot\left[-\sin(2x+1)\right]\cdot 2$$

$v(x)=e^{-x^4}$ también es una función compuesta, por lo que su derivada queda de la siguiente manera:

$$v'(x)=-4x^3\cdot e^{-x^4}$$

El siguiente paso es sustituir las funciones que correspondan en la siguiente expresión $y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$:

$$y'(x)=3\cdot\cos^2(2x+1)\cdot\left[-\sin(2x+1)\right]\cdot 2\cdot e^{-x^4}+\cos^3(2x+1)\cdot\left(-4x^3\cdot e^{-x^4}\right)$$

Por último, realizaremos operaciones para proporcionar la expresión final de una manera más sencilla:

$$y'(x)=-6e^{-x^4}\cdot\cos^2(2x+1)\cdot\sin(2x+1)-4x^3\cdot e^{-x^4}\cdot\cos^3(2x+1)$$

Si tomamos $-e^{-x^4}$ como factor común, nos queda la expresión final:

$$y'(x) = -e^{-x^4}\left[6\cos^2(2x+1)\cdot\sin(2x+1) + 4x^3\cdot\cos^3(2x+1)\right]$$

EJERCICIO 3:

Calcular la derivada de la siguiente función considerando que $x \neq 0$:

$$y(x) = \frac{e^{-x}\cos(x^2)}{4x^2}$$

Solución:

Lo primero que hay que diferenciar es que la función $y(x)$ está compuesta por la división de otras dos funciones:

$$y(x) = \frac{\overbrace{e^{-x}\cos(x^2)}^{u(x)}}{\underbrace{4x^2}_{v(x)}}$$

Las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son derivables para cualquier valor de x, por lo tanto, la división de las mismas será derivable también. Teniendo esto en cuenta, la derivada de la función $y(x)$ se calcula de la siguiente manera:

$$y'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

Comenzaremos calculando $u'(x)$ y $v'(x)$. Se debe tener en cuenta que la función $u(x)$ está compuesta por la multiplicación de otras dos funciones: $u(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u_1(x)}\underbrace{\cos(x^2)}_{u_2(x)}$. Por lo tanto, su derivada queda de la siguiente manera:

$$u'(x) = u_1^{'}(x)u_2(x) + u_1(x)u_2^{'}(x) = -e^{-x}\cdot\cos(x^2) + e^{-x}\cdot\left[-\sin\left(x^2\right)\cdot 2x\right]$$

La derivada de $v(x) = 4x^2$ se calcula de manera sencilla:

$$v'(x) = 8x$$

El siguiente paso es sustituir la expresión de cada una de las funciones en la siguiente expresión $y'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$:

$$y'(x) = \frac{\left[-e^{-x}\cdot\cos(x^2) + e^{-x}\cdot\left[-\sin\left(x^2\right)\cdot 2x\right]\right]4x^2 - \left[e^{-x}\cos(x^2)\right]\cdot 8x}{(4x^2)^2}$$

Por último, realizaremos operaciones para proporcionar la expresión final de una manera más sencilla:

$$y'(x) = \frac{-4x^2e^{-x}\cos(x^2) - 8x^3e^{-x}\sin(x^2) - 8xe^{-x}\cos(x^2)}{16x^4}$$

Si simplificamos el factor común existente $4x$ tanto en el denominador como en el numerador:

$$y'(x) = \frac{-xe^{-x}\cos(x^2) - 2x^2e^{-x}\sin(x^2) - 2e^{-x}\cos(x^2)}{4x^3}$$

Si tomamos $-e^{-x}$ como factor común:

$$y'(x) = \frac{-e^{-x}\left[x\cos(x^2) + 2x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2)\right]}{4x^3}$$

Por último, reorganizando la expresión anterior nos queda el resultado final:

$$y'(x) = \frac{-e^{-x}\left[(x+2)\cos(x^2) + 2x^2\sin(x^2)\right]}{4x^3}$$

EJERCICIO 4:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$y(x) = L(\tan(2x)) + 3^{x^2} + \sin^2(5x+1)\cos(x^3) \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Solución:

Lo primero que hay que diferenciar es que la función $y(x)$ está compuesta por la suma de otras tres funciones:

$$y(x) = u(x) + v(x) + w(x)$$

Donde:

$$u(x) = L(\tan(2x))$$

$$v(x) = 3^{x^2}$$

$$w(x) = \sin^2(5x+1)\cos(x^3)$$

Las funciones $u(x)$, $v(x)$ y $w(x)$ son derivables para cualquier valor de x, por lo que la suma también será derivable. Teniendo esto en cuenta, se puede calcular la derivada de $y(x)$ de la siguiente manera:

$$y'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x)$$

Por lo tanto, empezaremos a calcular $u'(x)$, $v'(x)$ y $w'(x)$:

La función $u(x)$ es compuesta: $u(x) = L(u_1(x))$ non $u_1(x) = \tan(2x)$

Con lo que: $u'(x) = \dfrac{1}{u_1(x)} u_1'(x)$

De la misma manera $u_1(x)$ es otra función compuesta: $u_1(x) = \tan(u_2(x))$ donde $u_2(x) = 2x$. Su derivada queda de la siguiente manera:

$$u_1'(x) = \frac{1}{\cos^2(u_2(x))} u_2'(x)$$

Donde $u_2^{'}(x)=2$

En total:

$$u^{'}(x)=\frac{1}{\tan(2x)}\frac{1}{\cos^2(2x)}2$$

$v(x)$ también es una función compuesta: $v(x)=3^{v_1(x)}$ donde $v_1(x)=x^2$. Por lo tanto, su derivada queda de la siguiente manera:

$$v^{'}(x)=3^{v_1(x)}L\left(3\right)v_1^{'}(x)$$

y $v_1^{'}(x)=2x$.

En total:

$v^{'}(x)=3^{x^2}\ 2x\,L\left(3\right)$

$w(x)$ es el producto de dos funciones y tenemos que utilizar la expresión de la derivada del producto:

$$w^{'}(x)=w_1^{'}(x)w_2(x)+w_1(x)w_2^{'}(x)$$

Donde $w_1(x)=\sin^2(5x+1)$ y $w_2(x)=\cos(x^3)$.

Del mismo modo $w_1(x)$ es una función compuesta:

$$w_1(x)=\left(w_{11}(x)\right)^2$$

Y $w_{11}(x)=\sin(w_{12}(x))$ donde $w_{12}(x)=5x+1$

Por lo tanto:

$$w_1^{'}(x)=2w_{11}(x)w_{11}^{'}(x)$$

$$w_{11}^{'}(x)=\cos(w_{12}(x))w_{12}^{'}(x)$$

Por lo tanto:

$$w_1^{'}(x)=2w_{11}(x)\cos(w_{12}(x))w_{12}^{'}(x)=2\sin(5x+1)\cos(5x+1)5$$

Del mismo modo $w_2(x)$ es una función compuesta:

$$w_2(x) = \cos(w_{21}(x))$$

Donde $w_{21}(x) = x^3$

Por lo tanto, la derivada queda de la siguiente manera:

$$w_2^{'}(x) = -\sin(w_{21}(x))w_{21}^{'}(x) = -\sin(x^3)3x^2$$

Finalmente, cuando se han obtenido los resultados parciales, se obtiene la derivada del producto de las funciones compuestas:

$$w^{'}(x) = w_1^{'}(x)w_2(x) + w_1(x)w_2^{'}(x) = 2\sin(5x+1)\cos(5x+1)5\cos(x^3) - \sin^2(5x+1)\sin(x^3)3x^2$$

Por tanto, el resultado es:

$$y^{'}(x) = 2\frac{1}{\tan(2x)}\frac{1}{\cos^2(2x)} + 3^{x^2}\; 2x\, L\left(3\right) + 2\sin(5x+1)\cos(5x+1)5\cos(x^3) - \sin^2(5x+1)\sin(x^3)3x^2$$