BLOQUE C-III: Grados, radianes y funciones trigonométricas básicas

EJERCICIO 1:

Expresa los siguientes ángulos en grados y calcula los valores de sus correspondientes seno y coseno:

a) $\dfrac{5\pi}{12}$ b) $\dfrac{11\pi}{6}$

Solución:

a) $\dfrac{5\pi}{12}\text{ rad}=\dfrac{5\pi}{12}\text{ rad}\cdot\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{ rad}}=75^\circ$

$$\operatorname{sen}\left(75^\circ\right)=\operatorname{sen}\left(45^\circ+30^\circ\right)=\operatorname{sen}\left(45^\circ\right)\cos\left(30^\circ\right)+\cos\left(45^\circ\right)\operatorname{sen}\left(30^\circ\right)=\cdots$$

$$\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

$$\cos\left(75^\circ\right)=\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)=\cos\left(45^\circ\right)\cos\left(30^\circ\right)-\operatorname{sen}\left(45^\circ\right)\operatorname{sen}\left(30^\circ\right)=\cdots$$

$$\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

b) $\dfrac{11\pi}{6}\text{ rad}=\dfrac{11\pi}{6}\text{ rad}\cdot\dfrac{360^\circ}{2\pi\text{ rad}}=330^\circ$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

EJERCICIO 2:

Deduce la expresión general del producto de senos a partir de las razones trigonométricas de la suma y resta de ángulos.

Solución:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta) \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta) \qquad (2)$$

Restando (1) y (2):

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

EJERCICIO 3:

Deduce la expresión general del seno del ángulo doble, a partir de la expresión general del seno de la suma de ángulos.

Solución:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

tal que, en el caso $\alpha=\beta$ se obtiene lo siguiente:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

EJERCICIO 4:

Deduce la expresión general de la tangente de la suma de ángulos.

Solución:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\dfrac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}}=\frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\beta)}$$

Por tanto:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\beta)}$$

EJERCICIO 5:

Calcula $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solución:

Sabemos que $\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

y como el ángulo $\pi/12$ está en el primer cuadrante, su tangente será positiva. Por tanto:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/6)}{1+\cos(\pi/6)}}=+\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{1+\sqrt{3}/2}}=+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\cdots$$

$$\cdots=+\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)}}=\left(2-\sqrt{3}\right)$$

EJERCICIO 6:

Resuelve la ecuación $\operatorname{sen}(2x)=\operatorname{sen}(x)$.

Solución:

$$\operatorname{sen}(2x)=\operatorname{sen}(x)\rightarrow 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)=\operatorname{sen}(x)\rightarrow 2\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)-\operatorname{sen}(x)=0$$

$$\operatorname{sen}(x)\cdot\left(2\cos(x)-1\right)=0\rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}(x)=0\rightarrow x=k\pi\\ \cos(x)=\dfrac{1}{2}\rightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases},\quad k\in\mathbb{Z}$$

EJERCICIO 7:

Resuelve la ecuación $\sqrt{3}\operatorname{sen}(x)+\cos(x)=1$.

Solución:

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}(x)+\cos(x)=1 \to \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(x)+\frac{1}{2}\cos(x)=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos(x)=\frac{1}{2} \to \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \to x=2k\pi \\ x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \to x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

EJERCICIO 8:

Verifica que se cumple la relación $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}(\alpha)$ haciendo uso de la circunferencia trigonométrica.

Solución: