E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

BLOQUE C-II: Dominio, extremos relativos y representación gráfica de funciones de una variable

EJERCICIO 1:

Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x-2}}\right)$

b) $f(x)=\dfrac{\arcsin(x)}{x^2+2x-3}$

Solución:

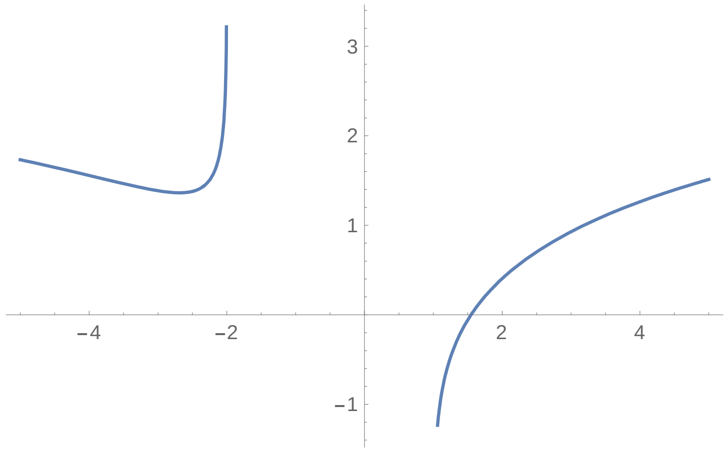
a) El argumento del logaritmo neperiano deber ser estrictamente positivo, por tanto:

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+x-2}}>0\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}x^2-1>0\\ \sqrt{x^2+x-2}>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2>1\\ x^2+x-2>0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}|x|>1\rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty,)\\ (x-1)(x+2)>0\rightarrow *\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-1<0\\ \sqrt{x^2+x-2}<0\end{cases}\rightarrow \text{Imposible } (x^2+x-2 \text{ tiene que ser positivo})\end{cases}$$

$$*\ (x-1)(x+2)>0\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}(x-1)>0\rightarrow x>1\\ (x+2)>0\rightarrow x>-2\end{cases}\rightarrow x\in(1,\infty)\\ \begin{cases}(x-1)<0\rightarrow x<1\\ (x+2)<0\rightarrow x<-2\end{cases}\rightarrow x\in(-\infty,-2)\end{cases}$$

Por tanto, el dominio de definición es: $\boxed{D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\in(-\infty,-2)\cup(1,\infty)\}}$

El gráfico de la función es el siguiente:



b) Por un lado, sabemos que el argumento del arco seno debe estar comprendido en el intervalo $[-1,1]$. Por tanto:

$$-1 \le x \le 1 \rightarrow x \in \left[-1,1\right]$$

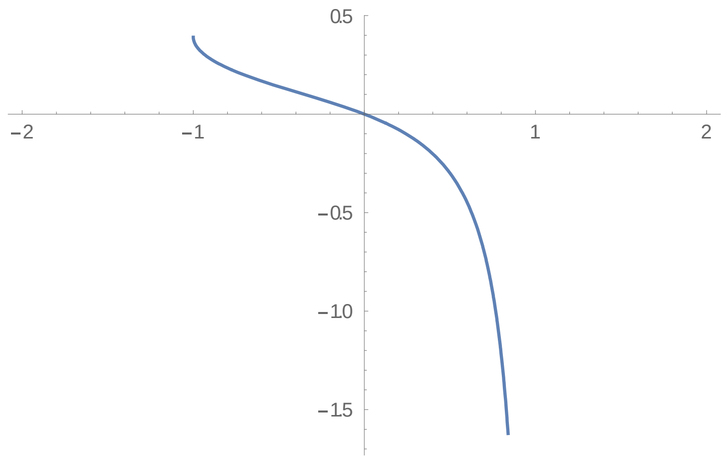
Por otro lado, en un cociente, el denominador debe ser distinto de cero:

$$x^2 + 2x - 3 \ne 0$$
$$(x-1)(x+2) \ne 0 \rightarrow x \ne 1 \wedge x \ne -2$$

Por tanto, el dominio de definición de la función es:

$$\boxed{D\left(f\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in [-1,1)\right\}}$$

El gráfico de la función es el siguiente:



EJERCICIO 2:

Sea la función: $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$

a) Calcula los extremos relativos.

b) Calcula los extremos absolutos en el intervalo [0,3].

Solución:

a) En primer lugar, calculamos la derivada de la función dada:

$$f'(x) = 1 \cdot x^{2/3} + (x-2)\frac{2}{3}x^{-1/3} = x^{2/3} + \frac{2(x-2)}{3x^{1/3}} = \frac{3x+2(x-2)}{3x^{1/3}} = \frac{5x-4}{3x^{1/3}}$$

A continuación, calculamos los puntos críticos, que son aquellos puntos donde la derivada se anula o no existe:

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \to 5x-4=0 \to \boxed{x=4/5} \\ \nexists f'(x) \to 3x^{1/3} \to \boxed{x=0} \end{cases}$$

Analizando el signo de la derivada clasificamos los puntos críticos:

$$\text{En el intervalo } (-\infty, 0) \to f'(x) = \frac{(-)}{(-)} > 0$$

$$\text{En el intervalo } (0, 4/5) \to f'(x) = \frac{(-)}{(+)} < 0$$

$$\text{En el intervalo } (4/5, \infty) \to f'(x) = \frac{(+)}{(+)} > 0$$

En el punto $\boxed{x=0}$ la el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, por lo que existe un **máximo**.

En el punto $\boxed{x=4/5}$ la el signo de la derivada cambia de negativo a positivo, por lo que existe una **mínimo**.

b) Extremos absolutos en el intervalo [0,3]:

Calculamos los valores de la función en los puntos $x=0$ y $x=3$:

$$f(0)=0$$
$$f(3)=2,08008>f(0)=0$$

En los extremos en el apartado a), el valor de la función es:

$$f(0)=0$$
$$f(4/5)=-1.034$$

Por tanto, $\boxed{x=3}$ es el **máximo absoluto** y $\boxed{x=4/5}$ es el **mínimo absoluto.**

El gráfico de la función es el siguiente: