BLOQUE C-I: Propiedades básicas

EJERCICIO 1:

Realiza los siguientes ejercicios breves:

a) Simplifica: $(2x^2)^{-3}y^4 \div (x^{-1}y)^2$

b) Resuelve: $3^{2x-1} = \dfrac{1}{3^{5-x}}$

c) Resuelve: $8^{x^2} = 4^{x+4}$

d) Simplifica: $\log_6 54 - \log_6 9$

e) Simplifica: $e^{4Ln3-3Ln4}$

Solución:

a) $(2x^2)^{-3}y^4 \div (x^{-1}y)^2 = \dfrac{2^{-3}x^{-6}y^4}{x^{-2}y^2} = \dfrac{y^2}{8x^4}$

b) $3^{2x-1} = \dfrac{1}{3^{5-x}} \to 3^{2x-1} = 3^{-5+x} \to 2x-1=-5+x \to x=-4$

c) $8^{x^2} = 4^{x+4} \to (2^3)^{x^2} = (2^2)^{x+4} \to 2^{3x^2} = 2^{2(x+4)} \to 3x^2 = 2(x+4) \to$

$3x^2-2x-8=0 \to (x-2)(3x+4)=0 \to x=2$ ó $x=-4/3$

d) $\log_6 54 - \log_6 9 = \log_6 \dfrac{54}{9} = \log_6 6 = 1$

e) $e^{4Ln3-3Ln4} = e^{Ln3^4 - Ln4^3} = e^{Ln\frac{81}{64}} = \dfrac{81}{64}$

EJERCICIO 2:

Descompón los siguientes valores absolutos:

a) $\left|x^2-1\right|$ b) $\left|Ln(x-1)\right|$

Solución:

a) $\left|x^2-1\right|$

Si se aplica la definición directamente, $\left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2-1 & , x^2-1 \geq 0 \\ -(x^2-1), & x^2-1 \leq 0 \end{cases}$, entonces debemos examinar la siguiente inecuación: $x^2-1 \geq 0$

Como $x^2-1=(x+1)(x-1)$, calculamos mediante la siguiente tabla cuándo el producto es positivo y cuándo negativo:

$(x+1)$	-	+	+
$(x-1)$	-	-	+
$(x+1)(x-1)$	+	-	+
	-∞	-1	1 ∞

La recta real se ha dividido por los puntos de corte de los factores, de modo que se estudia el signo en cada trozo, tanto para cada factor como para el producto total.

Por lo tanto, $\left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2-1 & , x^2-1 \geq 0 \\ -(x^2-1), & x^2-1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-1 & , x \leq -1 \wedge x \geq 1 \\ -(x^2-1), & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

b) $\left|Ln(x-1)\right|$

Si se aplica la definición directamente se obtiene $\left|Ln(x-1)\right| = \begin{cases} Ln(x-1) & , Ln(x-1) \geq 0 \\ -Ln(x-1), & Ln(x-1) \leq 0 \end{cases}$ y, del mismo modo que antes, debemos estudiar la inecuación $Ln(x-1) \geq 0$:

$Ln(x-1) \geq 0 \rightarrow (x-1) \geq e^0 = 1 \rightarrow x \geq 2$

Si estudiamos la segunda inecuación:

$Ln(x-1) \leq 0 \rightarrow 0 < (x-1) \leq 1 \rightarrow 1 < x \leq 2$

Por lo tanto, $|Ln(x-1)| = \begin{cases} Ln(x-1) & , Ln(x-1) \geq 0 \\ -Ln(x-1), & Ln(x-1) \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} Ln(x-1) & , x \geq 2 \\ -Ln(x-1), & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

EJERCICIO 3:

Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x|-|x+1|>0$ b) $0<x^2-4\leq 21$

Solución:

a) $|x|-|x+1|>0$

En primer lugar debemos descomponer los valores absolutos.

$$|x|=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x, & x\leq 0 \end{cases} \text{ y } |x+1|=\begin{cases} x+1 & ,x\geq -1 \\ -(x+1), & x\leq -1 \end{cases}$$

Es conveniente representar la descomposición de cada término en una tabla en función de la recata real:

$\|x\|$	$-x$	$-x$	x
$\|x+1\|$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$\|x\|-\|x+1\|$	1	$-2x-1$	-1
	-∞	-1	0 ∞
$\|x\|-\|x+1\|>0$	$1>0$ *Si*	$-2x-1>0$ $x<-\frac{1}{2}$	$-1>0$ *No*

Por lo tanto, $|x|-|x+1|>0 \rightarrow -\infty<x<-\frac{1}{2}$

b) $0<x^2-4\leq 21$

$$0<x^2-4\leq 21 \rightarrow 4<x^2\leq 25 \rightarrow \sqrt{4}<\sqrt{x^2}\leq\sqrt{25} \rightarrow 2<|x|\leq 5$$

Y ahora se estudia cada inecuación por su parte:

$$\left.\begin{array}{l} 2<|x| \rightarrow x<-2 \ \wedge \ x>2 \\ |x|\leq 5 \rightarrow -5\leq x\leq 5 \end{array}\right\} \text{Por lo tanto, } \mathrm{x}\in[-5,-2)\cup(2,5]$$