BLOQUE A- III: Técnica de Ruffini. Cálculo de las raíces de un polinomio

Definición de la raíz de un polinomio

r es raíz de un polinomio p(x) si y solo si p(r)=0

Factorización de un polinomio de grado n

Sea $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado n, entonces, p(x) se puede factorizar como $p(x)=a_n \cdot (x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot(x-r_3)\cdot\ldots\cdot(x-r_n)$, siendo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ las raíces del polinomio.

Cálculo de las raíces de un polinomio

Sea el polinomio $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \; : \; a_0, a_n \neq 0$

1) Raíces enteras

   Las posibles raíces enteras del polinomio p(x) son los divisores del coeficiente a_0.

2) Raíces racionales

   Sea p un divisor del coeficiente a_0

   Sea q un divisor de coeficiente a_n

   Las posibles raíces racionales del polinomio son del tipo p/q.

NOTA:

Las raíces de un polinomio pueden ser reales (enteras, racionales, irracionales) y complejas, pero para la técnica de Ruffini las raíces enteras y racionales son las candidatas más cómodas. Por ello, emplearemos el método de Ruffini con estas raíces (enteras y racionales) para reducir el grado de un polinomio.

EJEMPLO 1:

Calcula las raíces de los siguientes polinomios:

a) $p_1(x)=x^3-7x+6$

b) $p_2(x)= x^4-3x^3-4x^2+12x$

c) $p_3(x)= 2x^3+3x^2-8x+3$

d) $p_3(x)= x^3+5x^2-2x+10$

Solución:

a) $p_1(x)=x^3-7x+6$

Las posibles raíces enteras y racionales de p(x) son: ±6, ±3, ±2, ±1

Aplicando Ruffini:

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0

Por tanto, r=1 es raíz del polinomio. Luego el polinomio $p(x)=x^3-7x+6$ podríamos reescribirlo como $p_1(x)=(x-1)\cdot(x^2+x-6)$. Para obtener las dos raíces restantes, podríamos resolver directamente la ecuación cuadrática ($x^2+x-6=0$) o volver a aplicar Ruffini.

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0
2		2	6	
	1	3	0	
-3		-3		
	1	0		

Luego las raíces del polinomio $p_1(x)$ son: 1,2 y -3

Comprobación: $p_1(1)=1-7+6=0$

$p_1(2)=8-14+6=0$

$p_1(-3)=-27+21+6=0$

Por tanto, el polinomio $p_1(x)=x^3-7x+6$ se puede factorizar como:

$$\boxed{p_1(x)=x^3-7x+6=(x - r_1)\cdot(x - r_2)\cdot(x - r_3)= (x -1)\cdot(x -2)\cdot(x + 3)}$$

b) $p_2(x) = x^4-3x^3-4x^2+12x$

El polinomio no tiene término independiente, luego el polinomio se puede reescribir como $p_2(x) = x\cdot(x^3-3x^2-4x+12)$ y el cero será una raíz del polinomio.

Para factorizar el polinomio $x^3-3x^2-4x+12$ sabemos que las posibles raíces enteras y racionales son: ±12, ±6, ±3, ±2, ±1

Aplicando Ruffini al término $x^3-3x^2-4x+12$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -4 & 12 \\ 3 & & 3 & 0 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Luego, r=3 es raíz del polinomio y podemos reescribir el polinomio como $p_2(x) = x^4-3x^3-4x^2+12x = x\cdot(x-3)\cdot(x^2-4)$.

El polinomio se puede terminar de factorizar como:

$$\boxed{p_2(x) = x^4-3x^3-4x^2+12x = x\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}$$

c) $p_3(x) = 2x^3+3x^2-8x+3$

Las posibles raíces enteras y racionales son: ±3, ±1, ±3/2, ±1/2

Aplicando Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -8 & 3 \\ -3 & & -6 & 9 & -3 \\ \hline & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

Se observa que $r_1=-3$ es raíz del polinomio. Para calcular el resto de las raíces resolveremos la ecuación cuadrática resultante ($2x^2-3x+1=0$):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 2\cdot 1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Se obtiene que las otras dos raíces son: $r_2=1$ y $r_3=1/2$:

$$p_3(x)= 2x^3+3x^2-8x+3=2\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-1/2)$$

d) $p_3(x)= x^3+5x^2-2x+10$

Las posibles raíces enteras y racionales: ±10, ±5, ±2, ±1

Aplicando Ruffini:

	1	5	-2	-10
-5		-5	0	10
	1	0	-2	0

r_1=-5 es raíz del polinomio. Para calcular el resto de las raíces resolveremos la ecuación ($x^2-2=0$):

$$x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Por tanto las otras dos raíces son: $r_2=+\sqrt{2}$ y $r_3=-\sqrt{2}$.

En este ejercicio se observa que las raíces de un polinomio pueden ser irracionales, pero aplicar la técnica de Ruffini con estas raíces puede ser bastante complejo, por lo que se recomienda comenzar esta técnica con las posibles raíces enteras y racionales.

La factorización del polinomio queda de la siguiente manera:

$$p_3(x)= x^3+5x^2-2x+10=\cdot(x+5)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})$$