

## BLOQUE C-IV- Derivabilidad y cálculo de derivadas básicas: funciones compuestas

Algunas funciones de apariencia complicada pueden escribirse como composición de otras más simples. Por ejemplo, consideremos la función dada por:

$$f(x) = \cos(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

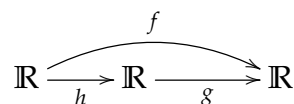
Si definimos ahora estas otras dos funciones

$$g(x) = \cos x, \quad h(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

diremos que la función  $f$  es composición de las otras dos, es decir:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El siguiente esquema describe el funcionamiento de la composición que acabamos de describir:



$$x \longmapsto x^2 \longmapsto \cos(x^2)$$

Para derivar composiciones de funciones se utiliza la *regla de la cadena*:

$$\boxed{f(x) = g(h(x)) \implies f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))}$$

siempre que la función  $h$  sea derivable en el punto  $x$  y que la función  $g$  lo sea en el punto  $h(x)$ .

### Ejemplo 1:

Calculemos la derivada de la función dada por  $f(x) = \cos(x^2)$ . Tal y como hemos descrito ya, tenemos que  $f(x) = g(h(x))$ , siendo  $g$  la función coseno y siendo  $h(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Ambas funciones son derivables para todo valor real, y de hecho,

$$g'(x) = -\sin x, \quad h'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) = -2x \sin(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

### Ejemplo 2:

Derivemos, ahora, la función definida por  $\psi(x) = \text{Ln}(\sin^2(x) + 1)$ . Definiendo las función  $u(x) = \sin^2(x) + 1$ , tenemos que  $\psi(x) = \text{Ln}(u(x))$ , donde

$$\mathbb{R} \xrightarrow[u]{\psi} (0, \infty) \xrightarrow{\text{Ln}} \mathbb{R}.$$

Notar que las imágenes de  $u$  pertenecen al intervalo  $(0, \infty)$ , que es precisamente el dominio de definición de la función logaritmo, siendo  $\text{Ln}'(x) = 1/x$  para todo  $x > 0$ . Aplicando la regla de la cadena, tenemos:

$$\psi'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)}. \quad (1)$$

Calculemos a continuación la derivada de la función  $u(x) = 1 + \sin^2(x)$ . Si definimos  $h(x) = 1 + x^2$ , tenemos que  $u(x) = h(\sin(x))$ , es decir, la siguiente composición:

$$\mathbb{R} \xrightarrow[\sin]{u} \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}$$

Más aún, como  $\sin'(x) = \cos x$  y  $h'(x) = 2x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$u'(x) = \cos x \cdot h'(\sin x) = \cos x \cdot 2 \sin x = \sin(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

por lo que sustituyendo en la fórmula (1), obtenemos

$$\psi'(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x) + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$