E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

BLOQUE C-IV- Derivabilidad y cálculo de derivadas básicas: funciones compuestas

Algunas funciones de apariencia complicada pueden escribirse como composición de otras más simples. Por ejemplo, consideremos la función dada por:

$$f(x) = \cos(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si definimos ahora estas otras dos funciones

$$g(x) = \cos x, \quad h(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

diremos que la función f es composición de las otras dos, es decir:

$$f(x) = g(h(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El siguiente esquema describe el funcionamiento de la composición que acabamos de describir:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto \cos(x^2)$$

Para derivar composiciones de funciones se utiliza la *regla de la cadena*:

$$\boxed{f(x) = g(h(x)) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))}$$

siempre que la función h sea derivable en el punto x y que la función g lo sea en el punto $h(x)$.

Ejemplo 1:

Calculemos la derivada de la función dada por $f(x) = \cos(x^2)$. Tal y como hemos descrito ya, tenemos que $f(x) = g(h(x))$, siendo g la función coseno y siendo $h(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ambas funciones son derivables para todo valor real, y de hecho,

$$g'(x) = -\sin x, \quad h'(x) = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x)) = -2x \sin(x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2:

Derivemos, ahora, la función definida por $\psi(x) = \mathrm{Ln}(\sin^2(\mathrm{x}) + 1)$. Definiendo las función $u(x) = \sin^2(x) + 1$, tenemos que $\psi(x) = Ln(u(x))$, donde

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "u"'] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & (0,\infty) \arrow[r, "Ln"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd} .$$

Notar que las imágenes de u pertenecen al intervalo $(0, \infty)$, que es precisamente el dominio de definición de la función logaritmo, siendo $Ln'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$. Aplicando la regla de la cadena, tenemos:

$$\psi'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)}. \tag{1}$$

Calculemos a continuación la derivada de la función $u(x) = 1 + \sin^2(x)$. Si definimos $h(x) = 1 + x^2$, tenemos que $u(x) = h(\sin(x))$, es decir, la siguiente composición:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\sin"'] \arrow[rr, bend left, "u"] & \mathbb{R} \arrow[r, "h"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Más aún, como $\sin'(x) = \cos x$ y $h'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos

$$u'(x) = \cos x \cdot h'(\sin x) = \cos x \cdot 2 \sin x = \sin(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

por lo que sustituyendo en la fórmula (1), obtenemos

$$\psi'(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x) + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$