E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

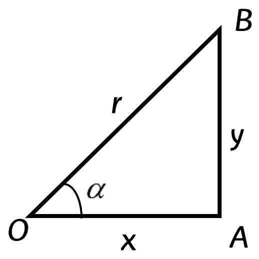
BLOQUE C-III: Grados, radianes y funciones trigonométricas básicas

Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente se definen de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{AB}{OB}=\frac{y}{r}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{OA}{OB}=\frac{x}{r}$$

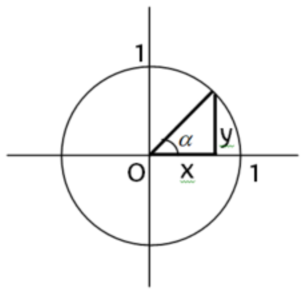
$$\operatorname{tg}(\alpha)=\frac{AB}{OA}=\frac{y}{x}$$



siendo las correspondientes razones trigonométricas inversas las siguientes:

$$\operatorname{cosec}(\alpha)=\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\frac{r}{y}\ ;\ \sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}=\frac{r}{x}\ ;\ \operatorname{ctg}(\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}=\frac{x}{y}$$

Por otro lado, en la circunferencia trigonométrica de centro O y radio $r=1$, los valores de los segmentos x e y asociados a un ángulo α cualquiera son respectivamente los valores de $\cos(\alpha)$ y $\sin(\alpha)$



tal que los signos de las diferentes las razones trigonométricas en cada cuadrante son los siguientes:

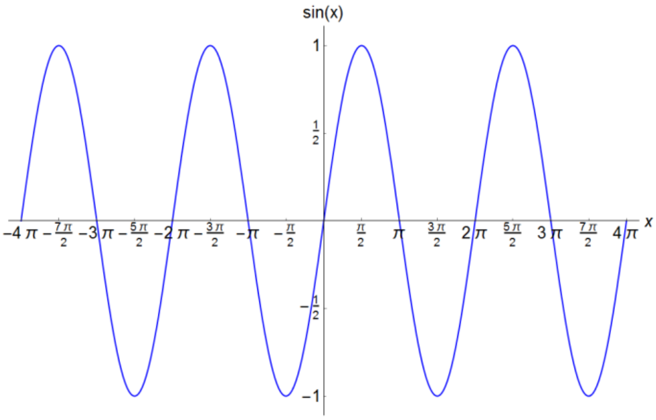
	Primer Cuadrante	Segundo Cuadrante	Tercer Cuadrante	Cuarto Cuadrante
$\sin(\alpha)$	+	+	–	–
$\cos(\alpha)$	+	–	–	+
$\mathrm{tg}(\alpha)$	+	–	+	–

Razones Trigonométricas más Utilizadas

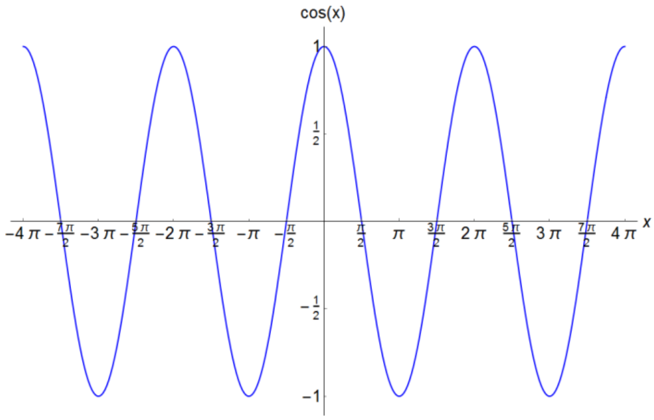
En la siguiente tabla se resumen las razones trigonométricas más utilizadas. Como se ve, los ángulos han sido expresados tanto grados como en radianes, pudiendo pasarse fácilmente de uno a otro tipo de unidad haciendo uso de la expresión "$360^{o} = 2\pi$ rad".

	0^{o} 0 rad	30^{o} $\pi/6$ rad	45^{o} $\pi/4$ rad	60^{o} $\pi/3$ rad	90^{o} $\pi/2$ rad
$\mathrm{sen}(\alpha)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\mathrm{tg}(\alpha)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

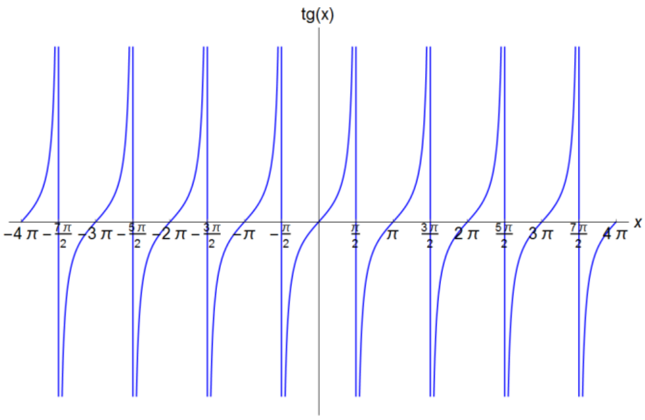
Representación Gráfica de las Funciones Trigonométricas Básicas



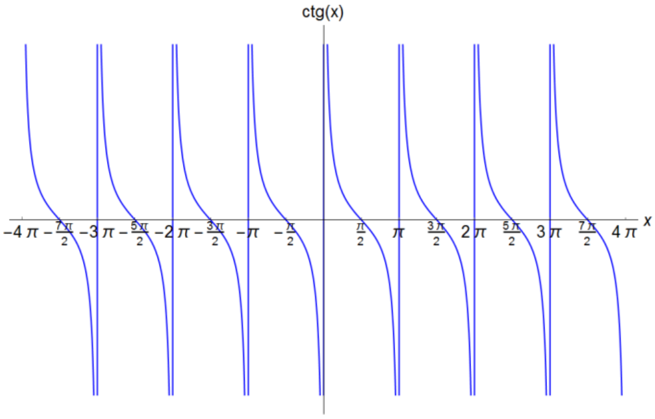
Periodo: T=2π



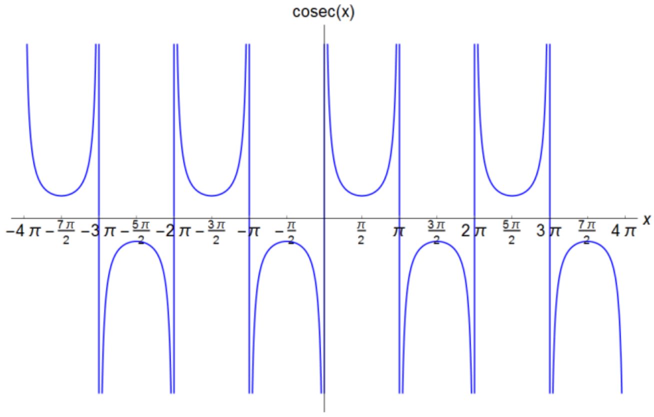
Periodo: T=2π



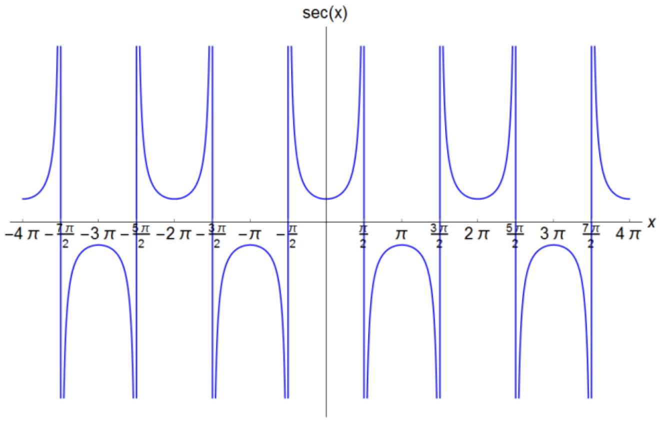
Periodo: T=π



Periodo: T=π



Periodo: T=2π



Periodo: T =2π

Ecuación Trigonométrica Fundamental

La siguiente expresión se puede deducir fácilmente a partir de la circunferencia trigonométrica y del Teorema de Pitágoras, y comúnmente se la suele llamar **Ecuación Trigonométrica Fundamental**.

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=x^2+y^2=1$$

Razones Trigonométricas de la Suma y Resta de Ángulos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha)+\operatorname{tg}(\beta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}(\alpha)-\operatorname{tg}(\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\beta)}$$

Suma y Resta de Senos y Cosenos

$$\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta)=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)-\operatorname{sen}(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Producto de Senos y Cosenos

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Otras Razones Trigonométricas

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha)=\frac{2\operatorname{tg}(\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha)}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$$

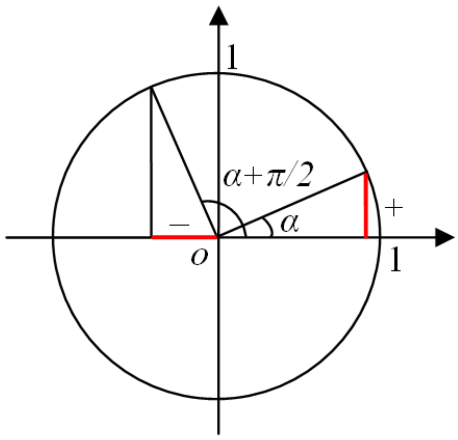
$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

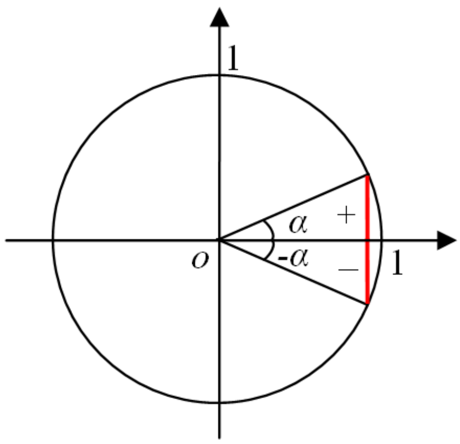
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

Para terminar, cabe destacar que algunas de las razones trigonométricas anteriores se pueden deducir de manera muy sencilla haciendo uso la circunferencia trigonométrica anteriormente definida. Por ejemplo:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}(\alpha) \rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$



$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha) \rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = -\operatorname{sen}(-\alpha)$$



Nota: Las imágenes contenidas en este archivo han sido creadas por el equipo docente de este curso y deberán utilizarse en los términos de la licencia Creative Commons CC BY-NC-SA.