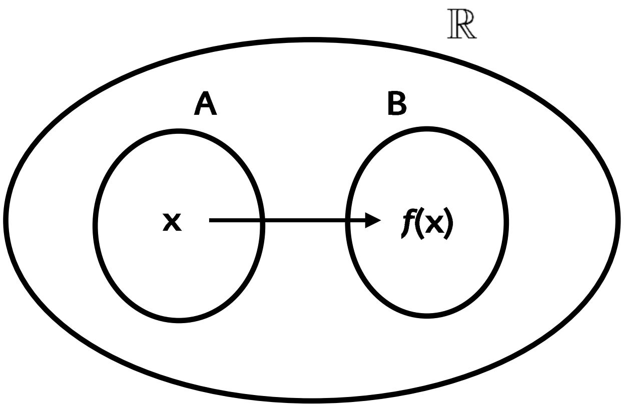
E. Alonso, E. Arrospide, A. Berganza, M.B. García, J.M. González, A. Unzueta

BLOQUE C-II: Dominio, extremos relativos y representación gráfica de funciones de una variable

DOMINIO

La trasformación de la siguiente figura, f, lleva los puntos del conjunto A al conjunto B. Al conjunto A se le denomina dominio de definición de la función f, esto es, $D(f)$.



A modo de regla, el dominio de una función lo forman los valores de la variable independiente para los cuales existe la función. $D(f)=\{x\in\mathbb{R} \,/\, f(x)\in\mathbb{R}\}$

De forma práctica, para calcular el dominio de una función primero realizamos una clasificación de tipos de funciones, y a continuación se estudia el dominio de cada tipología:

a) Polinomios:

Su dominio de definición es todo $\mathbb{R}$, y se expresa $D(f)=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

b) Cocientes:

Se estudia el dominio de numerador y denominador por separado, y a continuación se introduce el efecto del cociente, que consiste en eliminar del dominio los puntos que anulan el denominador.

CC BY NC SA

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{3x^2-4}{x^2-9};\, D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-9\neq 0\right\}=\mathbb{R}-\{-3,3\}=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$$

c) Raíces:

Raíz de índice Par: Los puntos para los que la función del radicando es positiva o nula,

$$D\left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\geq 0\right\},\, n\in\mathbb{N}$$

Ejemplo: $f(x)=\sqrt{x^2-4};\, D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-4\geq 0\right\}=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

Raíz de índice Impar: Es el dominio de la función del radicando, esto es,

$$D\left(\sqrt[2n+1]{f(x)}\right)=D(f(x)),\, n\in\mathbb{N}$$

Ejemplo: $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4};\, D(f)=D\left(x^2-4\right)=\mathbb{R}$

d) Logaritmos:

Cuando la función bajo el logaritmo es positiva, esto es,

$$D\left(\log_a f(x)\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)>0\right\}$$

Ejemplo: $f(x)=\ln(x^2-4);\, D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-4>0\right\}=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

e) Potencias:

Es el dominio de la función potencia, esto es,

$$D\left(a^{f(x)}\right)=D(f(x)),\, a>0$$

Ejemplo: $f(x)=e^{\sqrt{x}};\, D(f)=D\left(\sqrt{x}\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\geq 0\right\}=[0,\infty)$

f) Trigonométricas:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin(x) \\ f(x)=\cos(x) \end{array}\right\} \quad D(f)=\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\operatorname{tg}(x) \\ f(x)=\sec(x) \\ f(x)=\operatorname{cosec}(x) \\ f(x)=\operatorname{ctg}(x) \end{array}\right\}$$ se estudian como cocientes y $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\text{denominador}\neq 0\}$

Ejemplo:

$$f(x)=\operatorname{tg}(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)};\, D(f)=\{x\in\mathbb{R}\,/\cos(x)\neq 0\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\},\forall k\in\mathbb{Z}$$

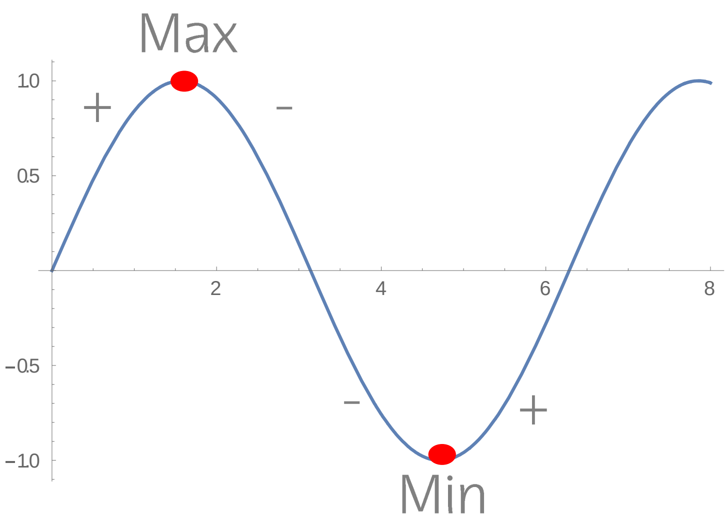
EXTREMOS RELATIVOS

Antes de estudiar los extremos relativos de una función debemos conocer su dominio de definición, y en esos puntos debe ser continua y derivable (puede serlo a trozos).

Analíticamente, para conocer el crecimiento y decrecimiento de una función se puede emplear la siguiente regla: se dice que una función es creciente en un punto x_0 si su derivada en ese punto es positiva, y decreciente, al contrario, si es negativa.

$$\text{Creciente: } f'(x_0) > 0$$
$$\text{Decreciente: } f'(x_0) < 0$$

Entonces, el punto x_0 será un máximo relativo si en un entorno pequeño alrededor de él la función pasa de ser creciente a decreciente. A la inversa, x_0 será un mínimo relativo si en un entono pequeño la función pasa de ser decreciente a creciente. En la siguiente gráfica se puede observar esto:



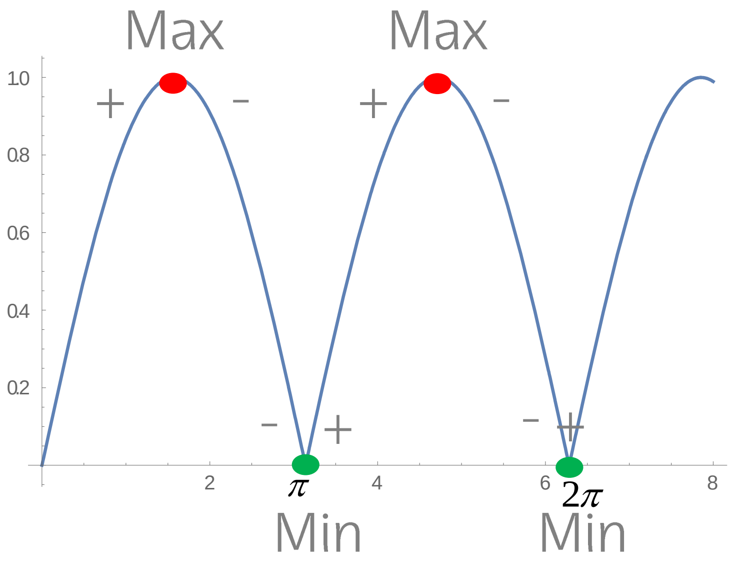
Por lo tanto, de modo práctico, para encontrar lo extremos relativos deberemos estudiar los cambios de signo de la derivada. Precisamente, en los extremos relativos de la figura se puede identificar claramente que la derivada es nula.

CC BY NC SA

Se puede emplear el siguiente criterio:

$$f'(x_0)=0 \rightarrow \begin{cases} f''(x_0)<0 \rightarrow \text{Máximo relativo} \\ f''(x_0)>0 \rightarrow \text{Mínimo relativo} \end{cases}$$

Como se ha mencionado al inicio, la función debe ser en primer lugar derivable (o a trozos). Pero puede ocurrir que en un punto crítico la derivada no este definida. Podemos observar que en la siguiente figura la derivada no existe en los puntos π y 2π, pero empleando el criterio del cambio de signo de la derivada se puede concluir que en ambos tenemos un mínimo relativo.



Nota: Las imágenes contenidas en este archivo han sido creadas por el equipo docente de este curso y deberán utilizarse en los términos de la licencia Creative Commons CC BY-NC-SA.

BY NC SA