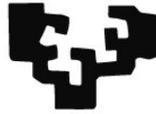


eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Autoevaluación

OCW 2020: *Parametrización y representación gráfica de superficies construidas*

Tema 1. Ejercicios propuestos

Equipo docente del curso

Martín Yagüe, Luis

Barrallo Calonge, Javier

Soto Merino, Juan Carlos

Lecubarri Alonso, Inmaculada

Departamento de Matemática Aplicada

Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I (EIB/BIE)

ETS de Arquitectura de Donostia-San Sebastián (ETSASS/DAGET)



EJERCICIOS DEL TEMA 1. PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS PLANAS

Ejercicio nº1

Enunciado

En el año 1989, el conocido arquitecto suizo Mario Botta construyó una vivienda unifamiliar en el municipio de Vacallo (Cantón del Tizino, Suiza). Esta vivienda, de planta triangular rectangular, presenta en su hipotenusa la fachada principal de composición simétrica. El motivo ornamental de la misma es una arquería formada por dos arcos entrelazados de medio punto estando los sálmeres al mismo nivel y resultando su canto formado por cinco roscas concéntricas de ladrillo cara-venta colocado a sardinel simple.

Se adjunta el siguiente enlace a la página web del estudio del arquitecto (*Mario Botta Architeti*) donde se muestra una fotografía de la fachada principal de la vivienda:

<http://www.botta.ch/it/SPAZI%20DELL-ABITARE?idx=10>

Parametrice las circunferencias que delimitan el área que conforman las testas de ladrillo del alzado de la arquería sabiendo que cada arco tiene un radio interior de 450 centímetros, su canto es de 130 centímetros y que la distancia entre los arcos es de 580 centímetros.

Represente gráficamente el área común a ambos arcos.

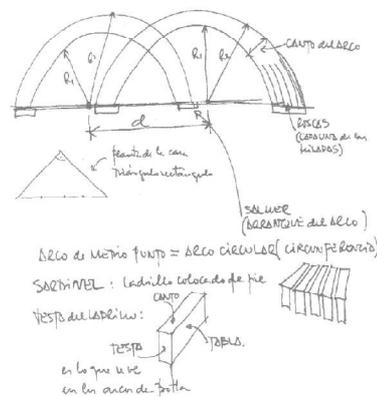


Imagen 1. Explicación de conceptos arquitectónicos (imagen propia)

Ejercicio nº2

Enunciado

Eero Saarinen fue un arquitecto norteamericano de origen finés. En 1947 diseñó el *Gateway Arch* para la ciudad de St. Louis en el estado de Missouri. Se trata de un impresionante monumento en forma de arco catenario cuya sección es un triángulo equilátero. Su construcción comenzó en 1963 y se completó en 1965. Constituye el arco más alto del mundo y, en su interior, contiene escaleras y un elevador para acceder a un mirador panorámico situado en la parte superior.



Imagen 2. Gateway Arch, St. Louis, Missouri

La imagen 2 es obra de Daniel Schwen.

Descargada de https://es.wikipedia.org/wiki/Arco_Gateway.

Represente gráficamente, en metros, los dos arcos catenarios que perfilan el monumento.

Debe tenerse en cuenta que, debido a la diferencia de anchura y altura entre el interior (intradós) y el exterior (extradós) del *Gateway Arch*, son necesarios dos arcos catenarios para poder representarlo con exactitud. La anchura de arco en la cota de suelo es de 630 pies en el extradós y de 536 pies en el intradós mientras que la altura máxima es de 630 y 612 pies en el extradós e intradós respectivamente.

La función *coseno hiperbólico*, $\cosh(kx)$, proporciona una magnífica herramienta para representar una catenaria si bien son necesarios algunos parámetros más para poder conferirle las dimensiones reales. Partiendo de $\cosh(0.01x)$ se puede establecer la siguiente ecuación para el *Gateway Arch* de St. Louis:

$$y = a - b \cdot \cosh(0.01x)$$

Ejercicio nº3

Enunciado

La Torre de Collserola es una esbelta torre de comunicaciones erigida en Barcelona con motivo de los Juegos Olímpicos por el arquitecto británico Norman Foster y la ingeniería Ove Arup. La torre se eleva 266 metros sobre el nivel del suelo a los que hay que añadir los 445 del terreno, resultando una de las estructuras más visibles desde toda la ciudad.



Imagen 4. Torre de Collserola, Barcelona

La imagen 4 es de dominio público.

Descargada de https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Torre_Collserola,_Norman_Foster.jpg.

La torre consta de un fuste hueco de hormigón de tan solo 4.5 metros de diámetro que soporta en su parte superior un sistema de tres tirantes y se ancla al suelo mediante otro sistema de tirantes. El peso total de la estructura metálica es de 3.000 toneladas.

La Torre de Collserola cuenta con 12 plataformas entre los 84 y los 136 metros, cada una de las cuales tiene una geometría característica denominada Triángulo de Reuleaux. Consiste en la intersección de tres circunferencias cuyo centro se sitúa en cada uno de los vértices de un triángulo equilátero coincidiendo el radio de cada una con la longitud de los lados del triángulo. Debe su nombre al ingeniero alemán Franz Reuleaux.

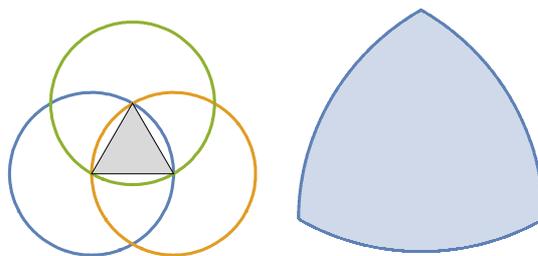


Imagen 5. Generación de un triángulo Reuleaux (imagen propia)

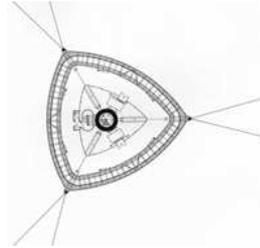


Imagen 6. Planta en plano

Imagen 6 descargada de:

<https://es.wikiarquitectura.com/edificio/torre-de-collserola/#torre-collserola-pl>

Sabiendo que el área de cada una de las plantas es de 429 metros cuadrados, determine el diámetro de las circunferencias que dan forma a la planta.

Halle las ecuaciones paramétricas que definen el contorno de cada planta. Represente gráficamente el triángulo de Reuleaux resultante.

Ejercicio nº4

Enunciado

El Cementerio de la familia Brion es la obra maestra del arquitecto italiano Carlo Scarpa. Se construyó cerca de Treviso, entre 1969 y 1978, como anexo a un cementerio municipal. Esta tumba familiar está repleta de simbolismo sobre la vida y la muerte, como la intersección de dos círculos de a modo de *vesica piscis*.

La forma *vesica piscis* canónica se caracteriza porque cada circunferencia pasa por el centro de la otra. En este caso no es así y las circunferencias están desplazadas arbitrariamente formando una peculiar intersección de 120.5 centímetros de altura en su parte central.



Imagen 10. Cementerio Brion, Treviso

La imagen 10 es de dominio público.

Descargada de https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/ca/Tomba_Brion_039.jpg.

Halle y represente las ecuaciones paramétricas de ambas circunferencias sabiendo que arrancan sobre un zócalo de 15 centímetros sobre el suelo y su diámetro es de 170 centímetros.

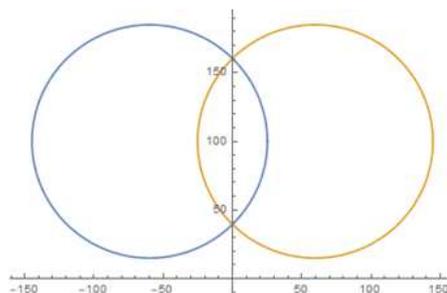


Imagen 11. Generación de la *vesica piscis* (imagen propia)

Determine, también, la altura en la parte central si la *vesica piscis* generada fuera canónica.

Ejercicio nº5

Enunciado

Marina City es un complejo de edificios diseñado por el arquitecto Bertrand Goldberg para la ciudad de Chicago, en el estado de Illinois. Se construyó en el año 1964 en la orilla norte del río Chicago en el centro de la ciudad. En el complejo se encuentran dos torres con una característica forma de mazorca de maíz que, en el momento de su inauguración, fueron los edificios residenciales y las estructuras de hormigón más altas del mundo.



Imagen 12. Marina City, Chicago, Illinois

La imagen 12 es obra de Spikebrennan.

Descargada de https://es.wikipedia.org/wiki/Marina_City#/media/Archivo:Marina_towers.JPG.

Las primeras 19 plantas, destinadas a aparcamiento, están diseñadas a partir de una rampa helicoidal al aire libre. Le siguen 40 plantas de apartamentos dispuestas alrededor de un núcleo de hormigón armado de 35 pies de diámetro en los que predominan las formas curvas, sin prácticamente ángulos rectos en su interior. La superficie residencial construida se distribuye en cada piso en 16 unidades habitacionales, cada una de las cuales queda comprendida entre un arco de la epicicloide y el núcleo central.



Imagen 13. Detalle de la fachada (imagen propia)

En la cota en planta, la forma de mazorca de maíz se traduce matemáticamente en una curva epicicloide siendo el diámetro de su circunferencia directriz de 120 pies.

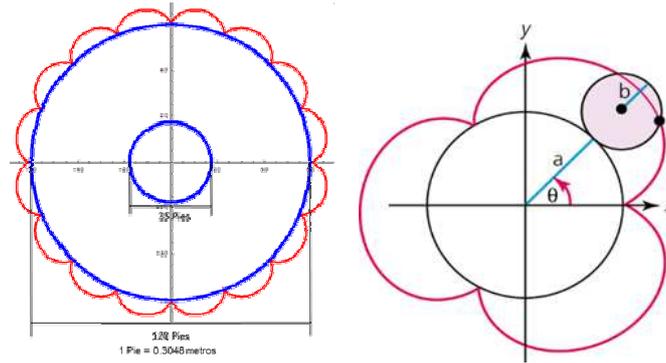


Imagen 14. Cota en planta y curva epicicloide (imagen propia)

Fórmula de una curva epicicloide siendo $r = b$ el radio de la circunferencia generatriz y $R = a$ el radio de la directriz tal como se ilustra en la imagen:

$$C \equiv \begin{cases} x(t) = (a + b) \cos(t) - b \cdot \cos\left(\frac{a+b}{2} \cdot t\right) \\ y(t) = (a + b) \sin(t) - b \cdot \sin\left(\frac{a+b}{2} \cdot t\right) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

A partir del diagrama de las cotas en planta y la fórmula de la epicicloide, calcule:

- los radios de las circunferencias que generan la epicicloide que da forma a las torres
- el perímetro, en metros, de la fachada en una sección transversal
- el área de cada unidad habitacional, en metros cuadrados

Se facilitan las fórmulas para el cálculo de la longitud y el área del dominio limitado por un arco de curva dada en forma paramétrica:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad Ar = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt$$