eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

Autoevaluación

OCW 2020: *Parametrización y representación gráfica de superficies construidas*

Test nº1 (resolución)

Equipo docente del curso

Martín Yagüe, Luis

Barrallo Calonge, Javier

Soto Merino, Juan Carlos

Lecubarri Alonso, Inmaculada

Departamento de Matemática Aplicada

Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I (EIB/BIE)

ETS de Arquitectura de Donostia-San Sebastián (ETSASS/DAGET)

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN: Test nº1

Ejercicio nº1

Enunciado

Determine los valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$ para los que intersectan el eje de ordenadas y la circunferencia:

$$\begin{cases} x = & 1 + \sqrt{2}\cos(t) \\ y = & \sqrt{2}\ \mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$$

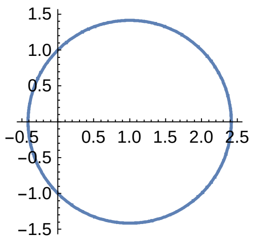
Resolución

```
Remove["Global`*"] (* Borrado de variables utilizadas *)
```

- definición de ecuaciones paramétricas y representación gráfica

In[201]:=
```
{x = 1 + √2 Cos[t], y = √2 Sin[t]};
```

```
ParametricPlot[{x, y}, {t, 0, 2 Pi}]
```



- cálculo de $t \in [0, 2\pi]$ cuando $x = 0$ (eje de ordenadas)

```
Solve[x == 0, t]
```

$\left\{\left\{t \to \text{ConditionalExpression}\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\, C[1],\ C[1] \in \mathbb{Z}\right]\right\},\right.$
$\left.\left\{t \to \text{ConditionalExpression}\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi\, C[1],\ C[1] \in \mathbb{Z}\right]\right\}\right\}$

- dos soluciones cada $2\pi\, rad$; el programa facilita las que se encuentran en el intervalo $[-\pi, \pi]$
- se buscan las correspondientes al intervalo $[0, 2\pi]$ en el que está definida la curva

In[1]:=
```
-3 Pi / 4 + 2 Pi
```

Out[1]= $\frac{5\pi}{4}$

In[204]:=
```
{x /. t → 3 Pi / 4, x /. t → 5 Pi / 4}
```

Out[204]= {0, 0}

- infinitas soluciones pero sólo válidas $t_1 = \frac{3\pi}{4}$, $t_2 = \frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi]$
- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$

Ejercicio nº2

Enunciado

Calcule el punto de la circunferencia $\begin{cases} x = & 1+\sqrt{2}\,\cos(t) \\ y = & \sqrt{2}\,\operatorname{sen}(t) \end{cases}$ $\forall\, t \in [0, 2\pi]$ correspondiente a $t = \frac{2\pi}{7}$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- definición de ecuaciones paramétricas

```
{x = 1 + √2 Cos[t], y = √2 Sin[t]};
```

- cálculo de coordenadas cartesianas del punto (cuando $t = \frac{2\pi}{7}$)

```
{x, y} /. t → 2 Pi / 7 // N
```

```
{1.88175, 1.10568}
```

- punto: $P = (1.88175, 1.10568)$
- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº3

Enunciado

Determine el valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$ para el que se obtiene el punto $A = (5.45, 4.15)$ de la recta que pasa por los puntos $P = (-1, 2)$ y $Q = (2, 3)$.

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- definición de puntos y vector director

```
puntos = {p = {-1, 2}, q = {2, 3}}; vr = q - p;
```

- parametrización

```
{xr = p[[1]] + vr[[1]] t, yr = p[[2]] + vr[[2]] t}
```

```
{-1 + 3 t, 2 + t}
```

$$r \equiv \begin{cases} x(t) = & -1+3t \\ y(t) = & 2+t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

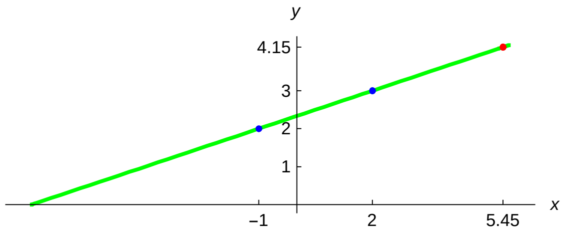
- cálculo del parámetro

```
Solve[{xr == 5.45, yr == 4.15}, t]
```

```
{{t → 2.15}}
```

- solución única: $t = 2.15$
- representación gráfica

```
pa = {5.45, 4.15};

punt = ListPlot[{puntos, {pa}}, PlotStyle → {Blue, Red, PointSize[Large]}];

recta = ParametricPlot[{xr, yr}, {t, -2, 2.2}, AxesLabel → {x, y}, PlotStyle → {Green, Thick}];

Show[recta, punt, PlotRange → All, Ticks → {{-1, 2, 5.45}, {1, 2, 3, 4.15}}, AspectRatio → Automatic]
```



- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº4

Enunciado

Indique la parametrización correcta de la cónica: $C \equiv x^2 + 4\,y^2 - 6\,x - 8\,y + 9 = 0$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- se trata de una elipse

```
m = CoefficientList[x^2 + 4 y^2 - 6 x - 8 y + 9, {x, y}]
```

```
{{9, -8, 4}, {-6, 0, 0}, {1, 0, 0}}
```

- coordenadas del centro

```
centro = {-(m[[2, 1]] / 2)/m[[3, 1]], -(m[[1, 2]] / 2)/m[[1, 3]]}
```

```
{3, 1}
```

- valor de K

```
k = (m[[2, 1]] / 2) ^2/m[[3, 1]] + (m[[1, 2]] / 2) ^2/m[[1, 3]] - m[[1, 1]]
```

```
4
```

- semiejes/radio

```
If[m[[3, 1]] == m[[1, 3]], radio = Sqrt[k/m[[3, 1]]], semiejes = {Sqrt[k/m[[3, 1]]], Sqrt[k/m[[1, 3]]]}]
```

```
{2, 1}
```

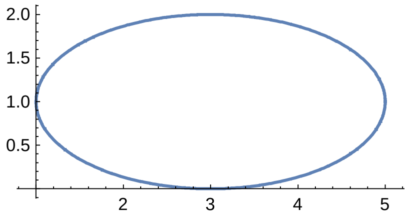
- ecuación canónica: $e \equiv \dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{1} = 1$

- ecuaciones paramétricas: $e \equiv \begin{cases} x(t) = 3 + 2\cos(t) \\ y(t) = 1 + \text{sen}(t) \end{cases} \quad \forall\, t \in [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$

- definición de ecuaciones paramétricas y representación gráfica

```
{x = 3 + 2 Cos[t], y = 1 + Sin[t]};
```

```
ParametricPlot[{x, y}, {t, 0, 2 Pi}]
```



- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{d}}$

Ejercicio nº5

Enunciado

Indique la parametrización correcta de la cónica: $C \equiv 2x^2 - 1 = \sqrt{2}\ y$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- se trata de una parábola de eje vertical
- parametrización

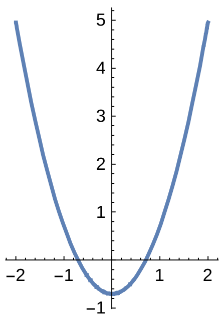
$$\left\{xp = t,\ yp = \frac{(2\,xp^{\wedge}2 - 1)}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$\left\{t,\ \frac{-1 + 2\,t^2}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$p \equiv \begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & \dfrac{2\,t^2 - 1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

- representación gráfica

```
ParametricPlot[{xp, yp}, {t, -2, 2}, PlotStyle → {Thick}]
```



- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$

Ejercicio nº6

Enunciado

Indique la parametrización correcta de la cónica: $C \equiv 2\,x - 1 = \sqrt{2}\;y^2$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- se trata de una parábola de eje horizontal
- parametrización

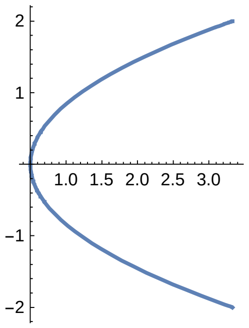
$$\left\{yp = t,\ xp = \frac{\left(\sqrt{2}\ yp^{\wedge}2 + 1\right)}{2}\right\}$$

$$\left\{t,\ \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\ t^2\right)\right\}$$

$$p \equiv \begin{cases} x(t) = & \dfrac{\sqrt{2}\ t^2 + 1}{2} \\ y(t) = & t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

- representación gráfica

```
ParametricPlot[{xp, yp}, {t, -2, 2}, PlotStyle → {Thick}]
```



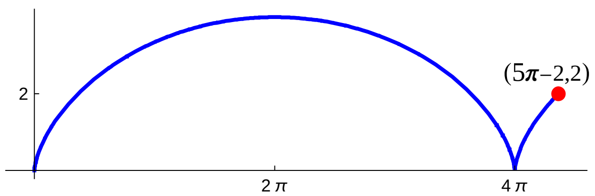
- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{b}}$

Ejercicio nº7

Enunciado

Determine el valor del parámetro $t \in \mathbb{R}$ del punto de la cicloide $P = (5\,\pi - 2,\ 2)$ que se muestra en la siguiente gráfica:

Out[23]=



Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- de la observación de la gráfica se deduce que el radio de la circunferencia generatriz es $R = 2$
- parametrización

```
In[2]:= {xc = 2 (t - Sin[t]), yc = 2 (1 - Cos[t])}
Out[2]= {2 (t - Sin[t]), 2 (1 - Cos[t])}
```

- cálculo del parámetro

```
Reduce[{xc == 5 Pi - 2, yc == 2}, t]
```

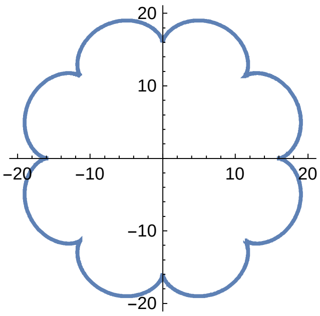
$t == \frac{5\pi}{2}$

- solución única: $t = \frac{5\pi}{2}$
- Solución: $\boxed{\text{Opción } c}$

Ejercicio nº8

Enunciado

Si el radio de la circunferencia generatriz es $r = 2$, determine el radio R de la circunferencia directriz de la epicicloide de la siguiente figura:



Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- ecuaciones paramétricas de una epicicloide

$$\boxed{C \equiv \begin{cases} x(t) = r(k+1)\cos(t) - r \cdot \cos((k+1)t) \\ y(t) = r(k+1)\operatorname{sen}(t) - r \cdot \operatorname{sen}((k+1)t) \end{cases} \quad \forall\, t \in [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}}$$

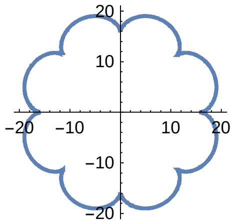
```
{xh = r * (k + 1) Cos[t] - r * Cos[9 t], yh = r * (k + 1) Sin[t] - r * Sin[9 t]};
```

- cada vuelta de la circunferencia generatriz traza un arco de la epicicloide
- entonces, $k = \frac{R}{r} = 8 \Rightarrow R = 16$
- parametrización

```
{r = 2; k = 8; xh, yh}
{18 Cos[t] - 2 Cos[9 t], 18 Sin[t] - 2 Sin[9 t]}
```

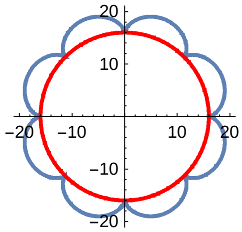
- representación gráfica

```
epi = ParametricPlot[{xh, yh}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Thick}]
```




```
dir = ParametricPlot[{16 Cos[t], 16 Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle → {Red, Thick}];
```

```
Show[epi, dir]
```



- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{a}}$

Ejercicio nº9

Enunciado

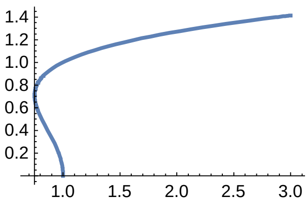
Determine, si es posible, la ecuación implícita de la curva: $C \equiv \begin{cases} x(t) = & 1 + t(t-1) \\ y(t) = & \sqrt{t} \end{cases} \quad t \in [0, 2]$

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- representación gráfica

```
ParametricPlot[{t (t - 1) + 1, Sqrt[t]}, {t, 0, 2}, PlotStyle → {Thick}]
```



- eliminación del parámetro

```
Eliminate[{x == t (t - 1) + 1, y == Sqrt[t]}, t] // Simplify
```

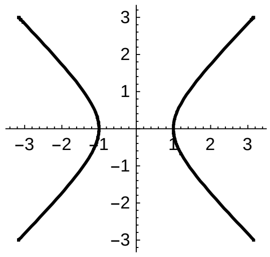
$x + y^2 == 1 + y^4$

- ecuación implícita: $C \equiv 1 + y^2\left(y^2 - 1\right) - x = 0 \;\; \forall\, y \in \left[0, \sqrt{2}\right]$
- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{e}}$

Ejercicio nº10

Enunciado

Indique la parametrización correcta de la hipérbola: $C \equiv x^2 - y^2 = 1$



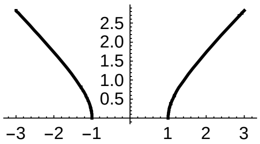
Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- Opción 1: haciendo $\boxed{x = t}$ hay que parametrizar dos arcos de forma que $C = C_1 \bigcup C_2$
  - arco 1, valores positivos de y: $C_1 \equiv \begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & \sqrt{t^2 - 1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} - (-1, 1)$

```
c1p = {x1p = t, y1p = √(t^2 - 1)};
```

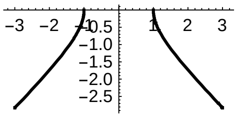
```
g1p = ParametricPlot[{c1p}, {t, -3, 3}, PlotStyle → {Black, Black, Thick}]
```



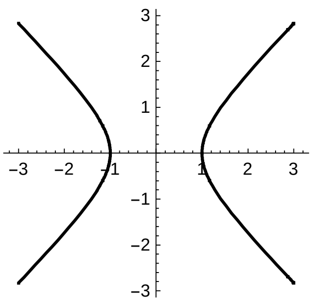
  - arco 2, valores negativos de y: $C_2 \equiv \begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & -\sqrt{t^2 - 1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} - (-1, 1)$

```
c1n = {x1n = t, y1n = -√(t^2 - 1)};
```

```
g1n = ParametricPlot[{c1n}, {t, -3, 3}, PlotStyle → {Black, Black, Thick}]
```



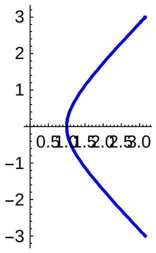

```
Show[g1p, g1n, PlotRange → All]
```



- Opción 2: haciendo $\boxed{y = t}$ hay que parametrizar dos arcos de forma que $C = C_1 \bigcup C_2$

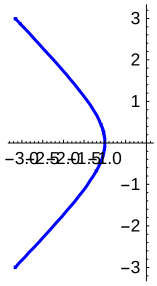
  - arco 1, valores positivos de x: $C_1 \equiv \begin{cases} x(t) = & \sqrt{t^2+1} \\ y(t) = & t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

```
c2p = {x2p = √(t^2 + 1) , y2p = t};

g2p = ParametricPlot[{c2p}, {t, -3, 3}, Axes → True, PlotStyle → {Blue, Blue, Thick}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

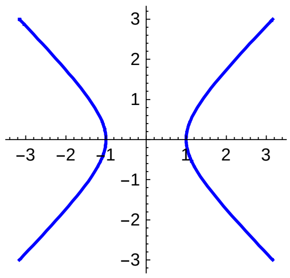


  - arco 2, valores negativos de x: $C_2 \equiv \begin{cases} x(t) = & -\sqrt{t^2+1} \\ y(t) = & t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

```
c2n = {x2n = -√(t^2 + 1) , y2n = t};

g2n = ParametricPlot[{c2n}, {t, -3, 3}, PlotStyle → {Blue, Blue, Thick}, AxesOrigin → {0, 0}]
```




```
Show[g2p, g2n, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]
```



- Solución: $\boxed{\text{Opción } \boldsymbol{f}}$