

Ejercicios resueltos

OCW 2020: *Parametrización y representación gráfica de superficies construidas*

Tema 1. Parametrización de curvas en el plano

Equipo docente del curso

Martín Yagüe, Luis
Barrallo Calonge, Javier
Soto Merino, Juan Carlos
Lecubarri Alonso, Inmaculada

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I (EIB/BIE)
ETS de Arquitectura de Donostia-San Sebastián (ETSASS/DAGET)



EJERCICIOS DEL TEMA 1. PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS PLANAS

Ejercicio nº1

Enunciado

Sea la curva cerrada $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ donde C_1 es un arco de circunferencia y C_2, C_3 son segmentos de recta tal como se muestra en la siguiente imagen:

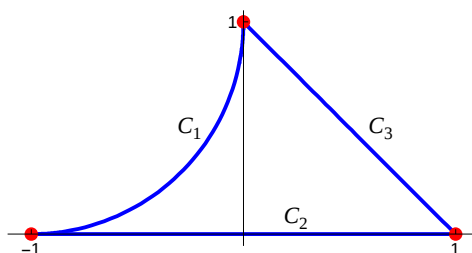


Imagen 1. Curva C (imagen propia)

- a) Parametrice cada uno de los tramos de la curva C
- b) Represente gráficamente la curva C

Resolución

Remove["Global`*"] (* Borrado de variables utilizadas *)

- a) Parametrice cada uno de los tramos de la curva C
 - C_1 es el arco comprendido en el intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ de una circunferencia de radio $R=1$ y centro en el punto $P = (-1, 1)$

$p = \{-1, 1\}; R = 1;$

$\{x1 = p[[1]] + R * \cos[t], y1 = p[[2]] + R * \sin[t]\}$

$\{-1 + \cos[t], 1 + \sin[t]\}$

$$C_1 \equiv \begin{cases} x(t) = -1 + \cos(t) \\ y(t) = 1 + \sin(t) \end{cases} \quad \forall t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \subseteq \mathbb{R}$$

- C_2 es el segmento del eje OX comprendido en el intervalo $x \in [-1, 1]$

$\{x2 = t, y2 = 0\}$

$\{t, 0\}$

$$C_2 \equiv \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$$

- C_3 es el segmento de la recta que pasa por los puntos $Q_1 = (1, 0)$ y $Q_2 = (0, 1)$ comprendido entre ambos puntos

$\{q_1 = \{1, 0\}, q_2 = \{0, 1\}\}; v_3 = q_2 - q_1;$

$\{x_3 = q_1[[1]] + v_3[[1]] t, y_3 = q_1[[2]] + v_3[[2]] t\}$

$\{1 - t, t\}$

$$C_3 \equiv \begin{cases} x(t) = 1 - t \\ y(t) = t \end{cases} \quad \forall t \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$$

- b) Represente gráficamente la curva C

- grafos de C_1, C_2, C_3

```
c1 = ParametricPlot[{x1, y1}, {t, 3 Pi / 2, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue, Thick}];
```

```
c2 = ParametricPlot[{x2, y2}, {t, -1, 1}, PlotStyle -> {Blue, Thick}];
```

```
c3 = ParametricPlot[{x3, y3}, {t, 0, 1}, PlotStyle -> {Blue, Thick}];
```

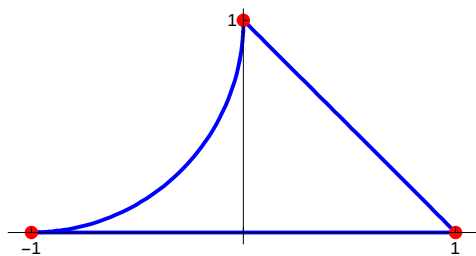
- vértices de la línea C

```
vert = {q1, q2, q3 = {-1, 0}};
```

```
cp = ListPlot[vert, PlotStyle -> {Red, PointSize[Large]}];
```

- unión de las gráficas anteriores

```
Show[c1, c2, c3, cp, PlotRange -> All, Ticks -> {{-1, 0, 1}, {1}}]
```



Ejercicio nº2

Enunciado

Se denomina astroide a la hipocicloide en la que longitud del radio de la circunferencia directriz es cuatro veces la longitud del radio de la circunferencia generatriz.

Se considera una astroide en la que el radio de la circunferencia generatriz es $r = 0.5 m$.

- a) Parametrice la curva
- b) Trace el grafo correspondiente
- c) Obtenga la ecuación cartesiana implícita de la astroide

Resolución

```
Remove["Global`*"]
```

- a) Parametrice la curva
 - definición del radio dado y de la constante de proporcionalidad entre los radios

$r = 0.5; k = 4;$

■ ecuaciones paramétricas

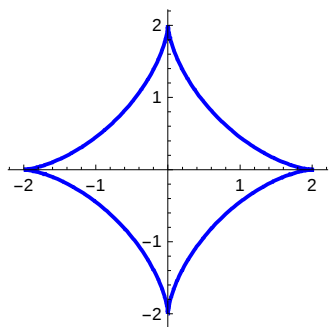
$$\{x_a = r(k-1) \cos[t] + r \cos[(k-1)t], y_a = r(k-1) \sin[t] - r \sin[(k-1)t]\}$$

$$\{1.5 \cos[t] + 0.5 \cos[3t], 1.5 \sin[t] - 0.5 \sin[3t]\}$$

$$C \equiv \begin{cases} x(t) = 1.5 \cos(t) + 0.5 \cos(3t) \\ y(t) = 1.5 \sin(t) - 0.5 \sin(3t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

■ b) Trace el grafo correspondiente

`ParametricPlot[{xa, ya}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue, Thick}]`



■ c) Obtenga la ecuación cartesiana implícita de la astroide

- la función **Eliminate** no puede eliminar el parámetro tal como indica en el correspondiente mensaje (se ha omitido la salida)

`Eliminate[{x == r(k-1) Cos[t] + r Cos[(k-1)t], y == r(k-1) Sin[t] - r Sin[(k-1)t]}, t]`

Eliminate: Inverse functions are being used by Eliminate, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information.

- pueden simplificarse las ecuaciones paramétricas usando las siguientes igualdades trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(3t) = 4 \cos^3(t) - 3 \cos(t) \\ \sin(3t) = 3 \sin(t) - 4 \sin^3(t) \end{cases}$$

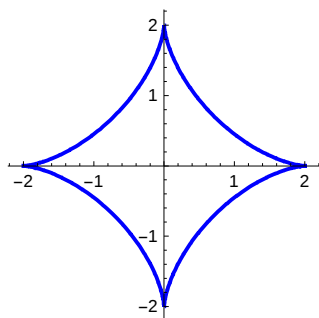
`ecs = {x == 1.5 Cos[t] + 0.5 Cos[3 t] /. Cos[3 t] -> (4 Cos[t]^3 - 3 Cos[t]),`
`y == 1.5 Sin[t] - 0.5 Sin[3 t] /. Sin[3 t] -> (-4 Sin[t]^3 + 3 Sin[t])} // Simplify`

$$\{x = 2 \cos^3[t], y = 2 \sin^3[t]\}$$

- obsérvese que se tiene otra parametrización de la astroide

$$C \equiv \begin{cases} x(t) = 2 \cos^3(t) \\ y(t) = 2 \sin^3(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

`ParametricPlot[{2 Cos[t]^3, 2 Sin[t]^3}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue, Thick}]`



- sumando ambas variables elevadas a $\frac{2}{3}$:

$$C \equiv x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

Ejercicio nº3

Enunciado

Las epicicloides son curvas generadas por un punto fijo de una circunferencia (generatriz) de radio r que gira sin deslizar por la parte externa de otra circunferencia fija (directriz) de radio R , siendo $R > r$.

Se considera una circunferencia generatriz cuyo radio es $r = 0.5 m$.

Parametrice y represente gráficamente los siguientes tipos de epicicloide:

- a) Cardioide
- b) Nefroide

Resolución

`Remove["Global`*"]`

- Ecuaciones paramétricas de las epicicloides denotando $k = \frac{R}{r}$ la razón entre los radios de las circunferencias directriz y generatriz:

$$C \equiv \begin{cases} x(t) = r(k+1) \cos(t) - r \cdot \cos((k+1)t) \\ y(t) = r(k+1) \sin(t) - r \cdot \sin((k+1)t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$$

- a) Cardioide

- realizando una sencilla búsqueda de información se tiene que, en esta curva, $k = 1$

$r = 0.5$; $k = 1$;

- ecuaciones paramétricas

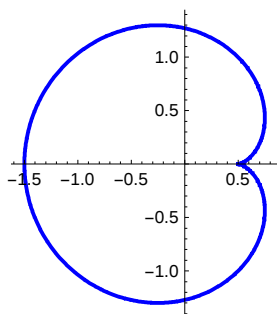
`{xc = r (k + 1) Cos[t] - r * Cos[(k + 1) t], yc = r (k + 1) Sin[t] - r * Sin[(k + 1) t]}`

`{1. Cos[t] - 0.5 Cos[2 t], 1. Sin[t] - 0.5 Sin[2 t]}`

$$C \equiv \begin{cases} x(t) = \cos(t) - 0.5 \cos(2t) \\ y(t) = \sin(t) - 0.5 \sin(2t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

- representación gráfica

`ParametricPlot[{xc, yc}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue, Thick}]`



■ b) Nefroide

- realizando una sencilla búsqueda de información se tiene que, en esta curva, $k = 2$

$r = 0.5$; $k = 2$;

- ecuaciones paramétricas

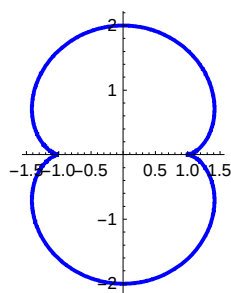
$\{x_n = r (k + 1) \cos [t] - r * \cos [(k + 1) t], y_n = r (k + 1) \sin [t] - r * \sin [(k + 1) t]\}$

$\{1.5 \cos [t] - 0.5 \cos [3 t], 1.5 \sin [t] - 0.5 \sin [3 t]\}$

$$C \equiv \begin{cases} x(t) = 1.5 \cos(t) - 0.5 \cos(3t) \\ y(t) = 1.5 \sin(t) - 0.5 \sin(3t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

- representación gráfica

`ParametricPlot[{xn, yn}, {t, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Blue, Thick}]`



Ejercicio nº4

Enunciado

Utilizando la función **CoefficientList** y el procedimiento descrito en el *Material de estudio* del tema 1, obtenga la ecuación canónica y parametrize las siguientes curvas:

- a) $2x - x^2 - 2y^2 - 9y - 1 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + 6x - 48y - 859 = 0$

Represéntelas gráficamente.

Resolución

`Remove["Global`*"]`

- a) $2x - x^2 - 2y^2 - 9y - 1 = 0$

- extracción de coeficientes de la expresión general

`m = CoefficientList[2 x - x^2 - 2 y^2 - 9 y - 1, {x, y}]`

`{-1, -9, -2}, {2, 0, 0}, {-1, 0, 0}`

- coordenadas del centro

$\text{centro} = \left\{ -\frac{m[[2, 1]] / 2}{m[[3, 1]]}, -\frac{m[[1, 2]] / 2}{m[[1, 3]]} \right\}$

$\left\{ 1, -\frac{9}{4} \right\}$

- valor de K

$$k = \frac{(m[[2, 1]] / 2)^2}{m[[3, 1]]} + \frac{(m[[1, 2]] / 2)^2}{m[[1, 3]]} - m[[1, 1]];$$

- como $A \neq C$, se trata de una elipse con lo que se obtienen los semiejes

$$\text{If}[m[[3, 1]] == m[[1, 3]], \text{radio} = \sqrt{\frac{k}{m[[3, 1]]}}, \text{semiejes} = \left\{ \sqrt{\frac{k}{m[[3, 1]]}}, \sqrt{\frac{k}{m[[1, 3]]}} \right\}$$

$$\left\{ \frac{9}{2\sqrt{2}}, \frac{9}{4} \right\}$$

- ecuación canónica y su correspondiente parametrización:

$$e \equiv \frac{(x-1)^2}{\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\left(y+\frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = 1 \Rightarrow e \equiv \begin{cases} x(t) = 1 + \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \cos(t) \\ y(t) = \frac{9}{4} \cdot (-1 + \sin(t)) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$$

- representación gráfica

```
xe = centro[[1]] + semiejes[[1]] * Cos[t], ye = centro[[2]] + semiejes[[2]] * Sin[t]
```

$$\left\{ 1 + \frac{9 \cos[t]}{2\sqrt{2}}, -\frac{9}{4} + \frac{9 \sin[t]}{4} \right\}$$

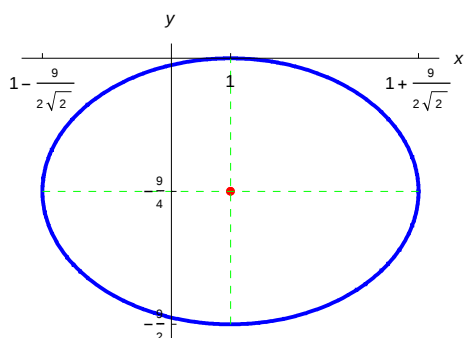
```
cent = ListPlot[{centro}, PlotStyle -> {Red, PointSize[Medium]}];
```

```
eje1 = ParametricPlot[{centro[[1]] + t, centro[[2]]},
  {t, -semiejes[[1]], semiejes[[1]]}, AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle -> {Green, Thin, Dashed}];
```

```
eje2 = ParametricPlot[{centro[[1]], centro[[2]] + t},
  {t, -semiejes[[2]], semiejes[[2]]}, AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle -> {Green, Thin, Dashed}];
```

```
ellipse = ParametricPlot[{xe, ye}, {t, 0, 2 Pi}, AxesLabel -> {x, y}, PlotStyle -> {Blue, Thick}];
```

```
Show[ellipse, cent, eje1, eje2, Ticks -> {{1 - 9 / (2 Sqrt[2]), 1, 1 + 9 / (2 Sqrt[2])}, {-9 / 4, -18 / 4}}]
```



```
Remove["Global`*"]
```

- b) $x^2 + y^2 + 6x - 48y - 859 = 0$

- extracción de coeficientes de la expresión general

```
m = CoefficientList[x^2 + y^2 + 6 x - 48 y - 859, {x, y}]
```

```
{-859, -48, 1}, {6, 0, 0}, {1, 0, 0}
```

- coordenadas del centro

$$\text{centro} = \left\{ -\frac{m[[2, 1]] / 2}{m[[3, 1]]}, -\frac{m[[1, 2]] / 2}{m[[1, 3]]} \right\}$$

$$\{-3, 24\}$$

■ valor de K

$$k = \frac{(m[[2, 1]] / 2)^2}{m[[3, 1]]} + \frac{(m[[1, 2]] / 2)^2}{m[[1, 3]]} - m[[1, 1]];$$

■ como $A = C$, se trata de una circunferencia con lo que se calcula su radio

$$\text{If}[m[[3, 1]] == m[[1, 3]], \text{radio} = \sqrt{\frac{k}{m[[3, 1]]}}, \text{semiejes} = \left\{ \sqrt{\frac{k}{m[[3, 1]]}}, \sqrt{\frac{k}{m[[1, 3]]}} \right\}]$$

38

■ ecuación canónica y su correspondiente parametrización:

$$e \equiv (x+3)^2 + (y-24)^2 = 38^2 \Rightarrow e \equiv \begin{cases} x(t) = -3 + 38 \cdot \cos(t) \\ y(t) = 24 + 38 \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$$

■ representación gráfica

$$\{xc = \text{centro}[[1]] + \text{radio} * \text{Cos}[t], yc = \text{centro}[[2]] + \text{radio} * \text{Sin}[t]\}$$

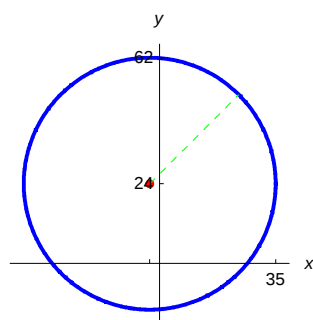
$$\{-3 + 38 \text{Cos}[t], 24 + 38 \text{Sin}[t]\}$$

$$\text{cent} = \text{ListPlot}[\{\text{centro}\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Red}, \text{PointSize}[\text{Medium}]\}];$$

$$\text{rad} = \text{ParametricPlot}[\{\text{centro}[[1]] + t, \text{centro}[[2]] + t\}, \{t, 0, 26.87\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, y\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Green}, \text{Thin}, \text{Dashed}\}];$$

$$\text{circ} = \text{ParametricPlot}[\{xc, yc\}, \{t, 0, 2\pi\}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{x, y\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Blue}, \text{Thick}\}, \text{Ticks} \rightarrow \{\{-3, -3 + 38\}, \{24, 24 + 38\}\}];$$

$$\text{Show}[\text{circ}, \text{cent}, \text{rad}]$$



Ejercicio nº5

Enunciado

Se denomina *vesica piscis* a la figura plana limitada entre los arcos de dos circunferencias trazadas de forma que cada una de ellas pasa por el centro de la otra siendo la longitud del radio de ambas, evidentemente, la distancia entre sus centros.

La importancia de esta figura radica en su amplio uso en la iconografía sagrada cristiana y en servir de referencia en la arquitectura gótica. El arco apuntado equilátero se corresponde con la curva superior de la *vesica piscis*.

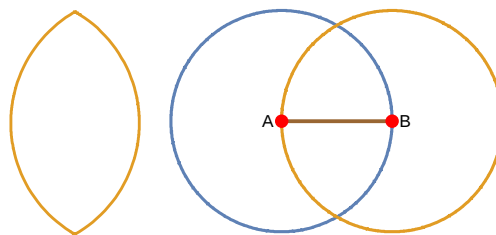


Imagen 2. Vesica piscis y su generación (imagen propia)

Genere una *vesica piscis*.

Resolución

Remove["Global`*"]

- En primer lugar, se establece un sistema cartesiano de referencia con origen en el centro de una de las circunferencias; por ejemplo, $A = (0, 0)$
- Se establece la unidad como radio de ambas circunferencias $R = 1$
- Por lo tanto, el centro de la segunda circunferencia se encuentra en el punto $B = (1, 0)$
- Ecuaciones implícitas de ambas circunferencias:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = 1 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$C_2 \equiv (x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \forall x \in [0, 2]$$

- Parametrización de las circunferencias:

$$C_1 \equiv \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad C_2 \equiv \begin{cases} x(t) = 1 + \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

- La *vesica piscis* está comprendida entre los puntos de intersección de las circunferencias
- Cálculo de los puntos de intersección, $C_1 \cap C_2$:

Solve[{ $x^2 + y^2 == 1$, $(x-1)^2 + y^2 == 1$ }, { x, y }]

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2}, y \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2}, y \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \right\}$$

- Parametrización del arco de C_1 que delimita la *vesica piscis*

- obtención de los valores del parámetro t entre los que está limitado

Solve[{Cos[t] == 1/2, Sin[t] == $-\sqrt{3}/2$ }, t]

$$\left\{ \left\{ t \rightarrow \text{ConditionalExpression}\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi C[1], C[1] \in \mathbb{Z}\right] \right\} \right\}$$

Solve[{Cos[t] == 1/2, Sin[t] == $\sqrt{3}/2$ }, t]

$$\left\{ \left\{ t \rightarrow \text{ConditionalExpression}\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi C[1], C[1] \in \mathbb{Z}\right] \right\} \right\}$$

- los sistemas planteados presentan infinitas soluciones, una por cada vuelta de circunferencia
- se escogen dos valores del parámetro que delimitan el arco

■ entonces:

$$C_1 \equiv \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$$

- Parametrización del arco de C_2 que delimita la *vesica piscis*
 - obtención de los valores del parámetro t entre los que está limitado

`Solve[{1 + Cos[t] == 1/2, Sin[t] == -√3/2}, t]`

`{t → ConditionalExpression[-2π/3 + 2π C[1], C[1] ∈ ℤ]}`

`Solve[{1 + Cos[t] == 1/2, Sin[t] == √3/2}, t]`

`{t → ConditionalExpression[2π/3 + 2π C[1], C[1] ∈ ℤ]}`

- los sistemas planteados presentan infinitas soluciones, una por cada vuelta de circunferencia
- se escogen dos valores del parámetro que delimitan el arco

■ entonces:
$$C_2 \equiv \begin{cases} x(t) = 1 + \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad \forall t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right]$$

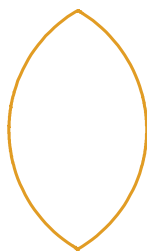
- representación gráfica

`C1 = {Cos[t], Sin[t]}; C2 = {1 + Cos[t], Sin[t]};`

`arco1 = ParametricPlot[C1, {t, -Pi/3, Pi/3}, Axes → None, PlotStyle → {Thickness[0.02]}];`

`arco2 = ParametricPlot[C2, {t, 2 Pi/3, 4 Pi/3}, Axes → None, PlotStyle → {Thickness[0.02]}];`

`vesica = Show[arco1, arco2, PlotRange → All]`



- Inserción de un triángulo equilátero en la parte superior del *vesica piscis*

`vértices = {{0, 0}, {1, 0}, {1/2, √3/2}};`

`triang = Graphics[{EdgeForm[Thick], LightBlue, Triangle[vértices]}];`

`puntos = ListPlot[vértices, PlotStyle → {Red, PointSize[Large]}];`

`Show[vesica, triang, puntos]`

