EJERCICIOS DEL TEMA 1. PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS PLANAS

Ejercicio nº1

Enunciado

Sea la curva cerrada $C = C_1 \bigcup C_2 \bigcup C_3$ donde C_1 es un arco de circunferencia y C_2, C_3 son segmentos de recta tal como se muestra en la siguiente imagen:

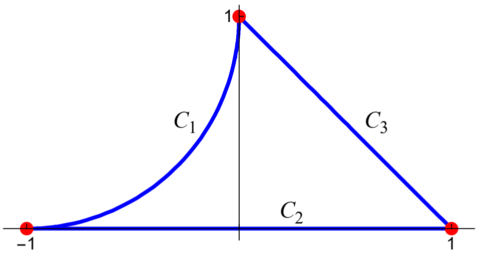


Imagen 1. Curva C (imagen propia)

- a) Parametrice cada uno de los tramos de la curva C
- b) Represente gráficamente la curva C

Ejercicio nº2

Enunciado

Se denomina astroide a la hipocicloide en la que longitud del radio de la circunferencia directriz es cuatro veces la longitud del radio de la circunferencia generatriz.

Se considera una astroide en la que el radio de la circunferencia generatriz es $r = 0.5\,m$.

- a) Parametrice la curva
- b) Trace el grafo correspondiente
- c) Obtenga la ecuación cartesiana implícita de la astroide

Ejercicio nº3

Enunciado

Las epicicloides son curvas generadas por un punto fijo de una circunferencia (generatriz) de radio r que gira sin deslizar por la parte externa de otra circunferencia fija (directriz) de radio R, siendo $R > r$.

Se considera una circunferencia generatriz cuyo radio es $r = 0.5\,m$.

Parametrice y represente gráficamente los siguientes tipos de epicicloide:

- a) Cardioide
- b) Nefroide

Ejercicio nº4

Enunciado

Utilizando la función **CoefficientList** y el procedimiento descrito en el *Material de estudio* del tema 1, obtenga la ecuación canónica y parametrice las siguientes curvas:

- a) $2x - x^2 - 2y^2 - 9y - 1 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + 6x - 48y - 859 = 0$

Represéntelas gráficamente.

Ejercicio nº5

Enunciado

Se denomina *vesica piscis* a la figura plana limitada entre dos arcos de circunferencia trazadas de forma que cada una de ellas pasa por el centro de la otra siendo la longitud del radio de ambas, evidentemente, la distancia entre sus centros.

La importancia de esta figura radica en su amplio uso en la iconografía sagrada cristiana y en servir de referencia en la arquitectura gótica. El arco apuntado equilátero se corresponde con la curva superior de la *vesica piscis*.

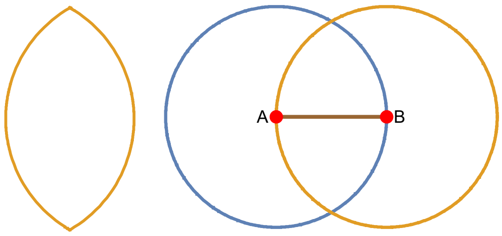


Imagen 2. Vesica piscis y su generación (imagen propia)

Genere una *vesica piscis*.

EJERCICIOS DEL TEMA 2. PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS EN EL ESPACIO

Enunciado

Sea la curva cerrada $C = C_1 \bigcup C_2 \bigcup C_3$ donde C_1 es un arco de circunferencia y C_2, C_3 son segmentos de recta tal como se muestra en la siguiente imagen:

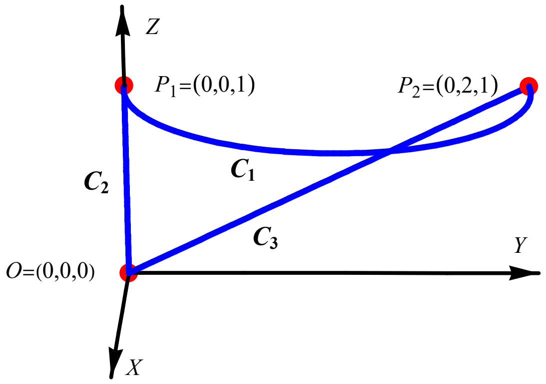


Imagen 1. Curva C (imagen propia)

- a) Parametrice cada uno de los tramos de la curva C
- b) Represente gráficamente la curva C

Ejercicio nº2

Enunciado

Se considera el cono recto: $S \equiv x^2 + y^2 = z^2$

Parametrice y represente gráficamente cada una de las siguientes curvas planas:

- a) $S \bigcap \pi_1$ donde $\pi_1 \equiv z = 3$
- b) $S \bigcap \pi_2$ donde $\pi_2 \equiv z = 1 + x$
- c) $S \bigcap \pi_3$ donde $\pi_3 \equiv z = \frac{1}{2}(4 + x)$

Ejercicio nº3

Enunciado

Parametrice y represente gráficamente la curva: $C \equiv \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = & 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 = & \frac{1}{4} \end{cases}$

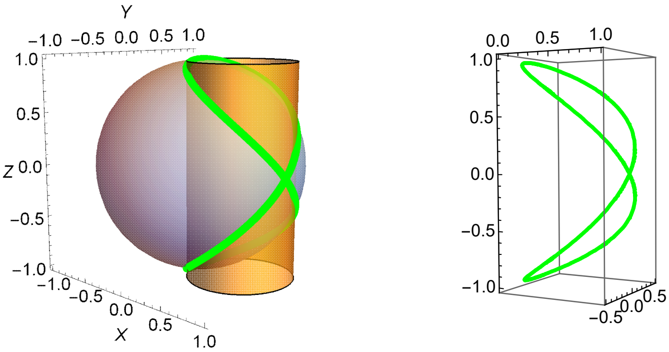


Imagen 2. Curva C (imagen propia)

Ejercicio nº4

Enunciado

La bóveda de cañón es un elemento constructivo del románico. Se erige concatenando de forma longitudinal arcos de medio punto (semicircunferencias). Geométricamente, se trata de medio cilindro circular.

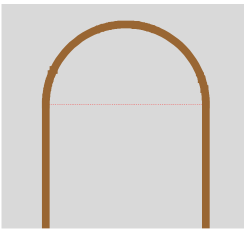


Imagen 3. Generación del arco de medio punto (imagen propia)

La bóveda de arista es el elemento arquitectónico del románico que se usa para techar espacios cuadrangulares. Resulta de intersectar ortogonalmente dos bóvedas de cañón del mismo radio.

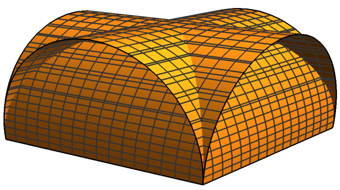


Imagen 4. Generación de la bóveda de arista (imagen propia)

Parametrice y represente las líneas que definen los seis arcos de medio punto y las dos aristas de la bóveda si se quiere cubrir un espacio cuadrangular de 10 metros de lado.

Ejercicio nº5

Enunciado

Parametrice y represente gráficamente cada una de las siguientes hélices $\forall\, t \in [0, 4\pi]$:

- a) $H_1 \equiv \begin{cases} x(t) = & \sqrt{2}\,\cos(t) \\ y(t) = & \sqrt{2}\,\operatorname{sen}(t) \\ z(t) = & t \end{cases}$
- b) $H_2 \equiv \begin{cases} x(t) = & \sqrt{2}\,\cos(2\,t) \\ y(t) = & \sqrt{2}\,\operatorname{sen}(2\,t) \\ z(t) = & t \end{cases}$
- c) $H_3 \equiv \begin{cases} x(t) = & \sqrt{2}\,\cos(t) \\ y(t) = & -\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(t) \\ z(t) = & t \end{cases}$

Ejercicio nº6

Enunciado

Parametrice y represente gráficamente cada una de las siguientes hélices:

- a) $H_1 \equiv \begin{cases} x(t) = & 2\,(t-2\,\pi)\cdot\cos(t)/(2\,\pi) \\ y(t) = & 2\,(t-2\,\pi)\cdot\operatorname{sen}(t)/(2\,\pi) \\ z(t) = & 4\,(t/2\,\pi) \end{cases}$
- b) $H_2 \equiv \begin{cases} x(t) = & 2\,(t-2\,\pi)\cdot\cos(2\,t)/(2\,\pi) \\ y(t) = & 2\,(t-2\,\pi)\cdot\operatorname{sen}(2\,t)/(2\,\pi) \\ z(t) = & 4\,(t/2\,\pi) \end{cases}$
- c) $H_3 \equiv \begin{cases} x(t) = & 2\,(t-2\,\pi)\cdot\cos(3\,t)/(2\,\pi) \\ y(t) = & 2\,(t-2\,\pi)\cdot\operatorname{sen}(3\,t)/(2\,\pi) \\ z(t) = & 4\,(t/2\,\pi) \end{cases}$

EJERCICIOS DEL TEMA 3. PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES PLANAS Y CILÍNDRICAS

Ejercicio nº1

Enunciado

Una estructura está compuesta por una sección plana rectangular definida en el plano $\pi_1 \equiv y = x$ y una sección plana triangular definida en el plano $\pi_2 \equiv y = -x$ tal como se muestra en la imagen 1:

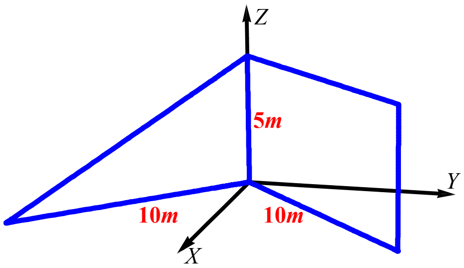


Imagen 1. Estructura descrita (imagen propia)

- a) Parametrice todas las líneas rectas de la estructura
- b) Parametrice la sección rectangular
- c) Parametrice la sección triangular
- d) Represente ambas secciones en el mismo gráfico junto con las líneas que las delimitan

Ejercicio nº2

Enunciado

Una estructura está compuesta por una sección circular limitada por la curva cerrada $C = C_1 \bigcup C_4$ y una sección triangular limitada por $C' = C_2 \bigcup C_3 \bigcup C_4$ donde C_1 es un arco de circunferencia y C_2 , C_3, C_4 son segmentos de recta tal como se muestra en la siguiente imagen:

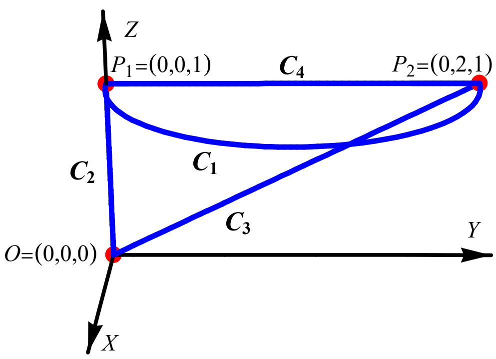


Imagen 2. Estructura descrita (imagen propia)

- a) Parametrice la sección circular
- b) Parametrice la sección triangular
- c) Represente ambas secciones en el mismo gráfico junto con las líneas que las delimitan

Ejercicio nº3

Enunciado

Parametrice y represente gráficamente cada una de las siguientes superficies regladas.

- a) Superficie cuyas generatrices son paralelas al eje Oz y se apoyan en la curva directriz:

$$C_1 \equiv \begin{cases} 4\,x^2 + 9\,y^2 - 36 = & 0 \\ z = & 0 \end{cases}$$

- b) Superficie cuyas generatrices son paralelas al eje Oy y se apoyan en la curva directriz:

$$C_2 \equiv \begin{cases} x^2 - z + 1 = & 0 \\ y = & 0 \end{cases}$$

- c) Superficie cuyas generatrices son paralelas al eje Ox y se apoyan en la curva directriz:

$$C_3 \equiv \begin{cases} y - 2\,z - 1 = & 0 \\ x = & 0 \end{cases}$$

Ejercicio nº4

Enunciado

Cuando $n = 4$, se considera la curva cerrada:

$$C_4 \equiv \begin{cases} x(t) = & \cos(n \cdot t) \cdot \cos(t) \\ y(t) = & \cos(n \cdot t) \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z(t) = & 0 \end{cases} \quad \forall\, t \in [0,\, 2\,\pi]$$

- a) Parametrice el dominio que delimita C_4
- b) Represente en el mismo gráfico la curva y el dominio delimitado

Ejercicio nº5

Enunciado

Cuando $n = 3$, se considera la curva cerrada:

$$C_5 \equiv \begin{cases} x(t) = & 2 + \cos(n \cdot t) \cdot \cos(t) \\ y(t) = & 2 + \cos(n \cdot t) \cdot \operatorname{sen}(t) \\ z(t) = & 0 \end{cases} \quad \forall\, t \in [0,\, 2\,\pi]$$

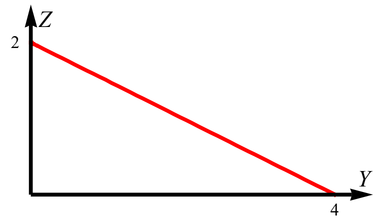
- a) Parametrice el dominio que delimita C_5
- b) Represente en el mismo gráfico la curva y el dominio delimitado
- c) ¿Puede hacerse una parametrización del dominio análoga a la del ejercicio nº4?

TEMA 4. PARAMETRIZACIÓN DE SUPERFICIES CUÁDRICAS Y DE REVOLUCIÓN

Ejercicio nº1

Enunciado

Parametrice y represente gráficamente el cono de revolución generado por el siguiente segmento de recta:

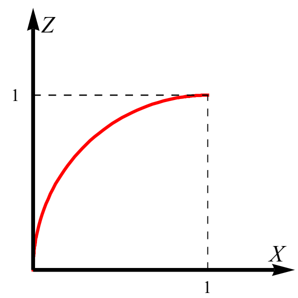


- a) al girar alrededor del eje Oz
- b) al girar alrededor del eje Oy
- c) al girar alrededor del eje Oz trasladando el vértice al origen de coordenadas
- d) al girar alrededor del eje Oz parametrizando el cono como una cuádrica sin tener en cuenta la revolución

Ejercicio nº2

Enunciado

Parametrice y represente gráficamente la superficie de revolución generada por el siguiente arco de circunferencia:



- a) al girar alrededor del eje Oz
- b) al girar alrededor del eje Ox
- c) al girar alrededor del eje Ox trasladando el centro de la esfera al punto $P = (-1, 0, 2)$

Ejercicio nº3

Enunciado

El aparato receptor de una antena parabólica se sitúa a un metro del fondo. Parametrice y represente gráficamente dicha antena si tiene un diámetro de 4 metros a la altura a la que está situado el aparato receptor.

Ejercicio nº4

Enunciado

Parametrice y represente gráficamente el toro generado por una circunferencia centrada en $P = (1, 0, 2)$ y radio $R = 1$

- a) al girar alrededor del eje Oz
- b) al girar alrededor del eje Oy

Ejercicio nº5

Enunciado

La esfera inscrita en el cilindro constituye una de las representaciones más icónicas del imaginario matemático. Fue Arquímedes quien descubrió que la relación entre los volúmenes de la esfera y el cilindro es de dos tercios.

El Panteón de Agripa (ó Panteón de Roma) reproduce fielmente este paradigma geométrico mediante una cúpula semiesférica de 43.40 metros de diámetro apoyada sobre un cilindro de las mismas dimensiones. El conjunto adquiere un mayor dramatismo gracias a un gigantesco óculo de 8.90 metros abierto en la parte superior de la cúpula y que permite la entrada de luz natural.

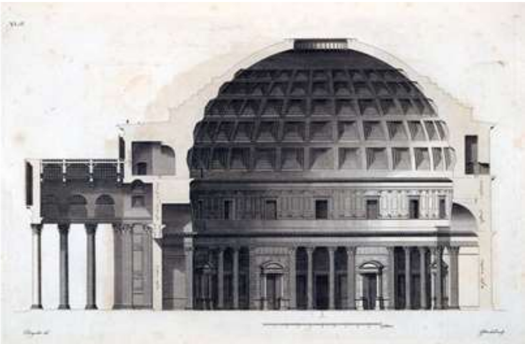


Imagen 1. Sección transversal del Panteón obra de Antoine Babury (grabado, 1682)

El Panteón está considerado el edificio de hormigón más sofisticado del mundo antiguo y fue durante casi dos milenios la cúpula de mayor dimensión hasta la llegada de la arquitectura contemporánea.

Su audaz diseño ha sobrevivido hasta nuestros días gracias al aligeramiento que suponen los casetones de su interior y al uso de material volcánico, como puzolana y pómez, que aliviaron la carga de la cúpula. A ello hay que añadir la ausencia de material en el óculo, dotado de un anillo de compresión que distribuye los esfuerzos que confluyen sobre él.

Imagen 2. Detalle del óculo y los casetones (imagen propia)

Utilizando las medidas citadas anteriormente, represente de forma sencilla la geometría del Panteón de Roma.

Ejercicio nº6

Enunciado

Para celebrar el jubileo de la Iglesia Católica por sus 2000 años de existencia, se convocó un concurso con la presencia de los mejores arquitectos de la época. Finalmente, el seleccionado fue el arquitecto norteamericano Richard Meier si bien la conclusión del templo se retrasó notablemente, hasta 2003. La obra de Richard Meier se caracteriza por el uso de la luz y su principal seña de identidad la constituye el color blanco. Al igual que en otras de sus edificaciones destaca en la Iglesia del Jubileo la claridad de los espacios y el uso racional de la geometría con un fascinante diálogo entre cubo y esfera

Imagen 3. Iglesia del Jubileo, Roma, Italia

Imagen 3 de Claudia Renzi bajo licencia CC BY-SA 4.0 obtenida en:

https://en.wikipedia.org/wiki/Jubilee_Church#/media/File:Chiesa_di_Dio_Padre_Misericordioso_-_Tor_Tre_Teste_-_Roma_Arch._Richard_Meier.JPG

El templo está compuesto por tres poderosos muros curvos semejantes a las velas de un barco como una discreta insinuación a la Santísima Trinidad, según indica Meier. El concepto arquitectónico es innovador y brillante, pero planteaba un curioso reto constructivo. Inicialmente, las tres esferas se diseñaron concéntricas, con diferentes radios y, por tanto, diferentes curvaturas. En consecuencia, los bloques prefabricados de doble curvatura que formaban los muros eran diferentes para cada esfera, al igual que el andamiaje, construido sobre raíles para poder salvar la dificultad de trabajar sobre superficies curvas.

Para solventar este problema, el equipo de ingeniería introdujo algunas modificaciones sobre el diseño inicial. La más relevante fue la de utilizar tres esferas con idéntica curvatura, pero de centro ligeramente desplazado. El efecto conseguido es similar al primitivo, pero con la ventaja de poder utilizar un único modelo de losa de hormigón ensamblada mediante un postensado a través de cables horizontales y verticales.

Imagen 4. Detalle de los muros curvos

Imagen 4 de Silvia Ercoli bajo licencia CC BY-SA 3.0 obtenida en:

https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Chiesa_di_Dio_Padre_Misericordioso#/media/File:Le_vele_immobili.JPG

Parametrice los tres muros curvos de la Iglesia del Jubileo utilizando los datos de los siguientes croquis:

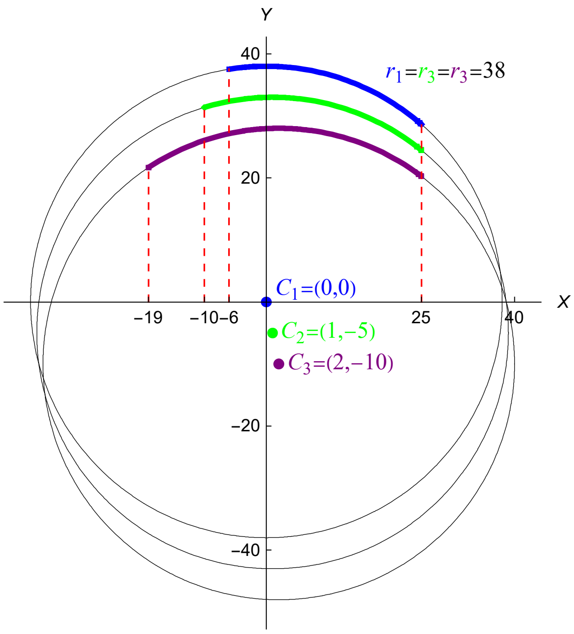


Imagen 5. Planta de las secciones esféricas (imagen propia)

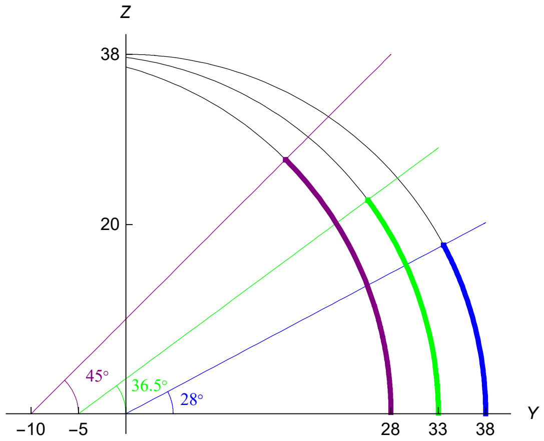


Imagen 6. Alzado de las secciones esféricas (imagen propia)

TEMA 5. SUPERFICIES REGLADAS EN ARQUITECTURA

Ejercicio nº1

Enunciado

Se considera la superficie reglada generada por rectas que se apoyan en las curvas:

$$C_1 \equiv \begin{cases} y = & x^2 - 1 \\ z = & 0 \end{cases} \quad \forall\, x \in [-1, 1] \subset \mathbb{R} \qquad C_2 \equiv \begin{cases} y = & 1 - x^2 \\ z = & 3 \end{cases} \quad \forall\, x \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

- a) Halle su forma paramétrica
- b) Represéntela gráficamente
- c) Calcule su ecuación cartesiana

Ejercicio nº2

Enunciado

El elegante arquitecto vienés Hans Hollein fue el elegido para diseñar Vulcania, un Centro de Vulcanología cerca de Clermont-Ferrand en la región volcánica francesa de Auvernia. El proyecto comenzó en 1994 pero no fue finalizado hasta 2002. Construido a 1000 metros de altura, se trata de un centro de interpretación de las fuerzas de la naturaleza y la creación del planeta.

Imagen 1. Alzado de las superficies cónicas

El elemento principal del complejo lo forman dos mitades de cono circular con diferentes centros y radios que insinúan uno de los numerosos cráteres volcánicos de la zona. El exterior de los conos está revestido de basalto mientras que el interior está formado por luminosos paneles de acero inoxidable de aspecto flamígero.

Imagen 2. Detalle del interior de los conos

Imágenes obtenidas en la web del estudio de Hans Hollein :

https://www.hollein.com/eng/Architecture/Nations/France/Vulcania

Parametrice el conjunto monumental formado por las dos mitades cónicas de acuerdo a las dimensiones que se adjuntan en la siguiente imagen:

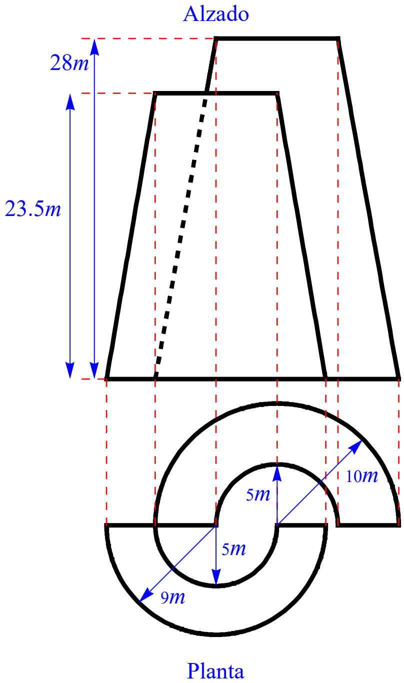


Imagen 3. Alzado y planta de las superficies cónicas (imagen propia)

Ejercicio nº3

Enunciado

Eero Saarinen fue un arquitecto norteamericano de origen finés. En 1947 diseñó el *Gateway Arch* para la ciudad de St. Louis en el estado de Missouri. Se trata de un impresionante monumento en forma de arco catenario cuya sección es un triángulo equilátero. Su construcción comenzó en 1963 y se completó en 1965. Constituye el arco más alto del mundo y, en su interior, contiene escaleras y un elevador para acceder a un mirador panorámico situado en la parte superior.

Imagen 4. Gateway Arch, St. Louis, Missouri

La imagen 4 es obra de Daniel Schwen.
Descargada de https://es.wikipedia.org/wiki/Arco_Gateway.

Parametrice y represente gráficamente el monumento utilizando el metro como unidad de medida.

Debe tenerse en cuenta que, debido a la diferencia de anchura y altura entre el interior (intradós) y el exterior (extradós) del *Gateway Arch*, son necesarios dos arcos catenarios para poder representarlo con exactitud. La anchura de arco en la cota de suelo es de 630 pies en el extradós y de 536 pies en el intradós mientras que la altura máxima es de 630 y 612 pies en el extradós e intradós respectivamente.

La función *coseno hiperbólico*, $\cosh(k\,x)$, proporciona una magnifica herramienta para representar una catenaria si bien son necesarios algunos parámetros más para poder conferirle las dimensiones reales. Partiendo de $\cosh(0.01\,x)$ se puede establecer la siguiente ecuación para el *Gateway Arch* de St. Louis:

$$\boxed{y = a - b \cdot \cosh(0.01\,x)}$$

Ejercicio nº4

Enunciado

La bóveda cuatripartita o de crucería está asociada al estilo gótico y sus arcos se forman a partir de la construcción *vesica piscis*.

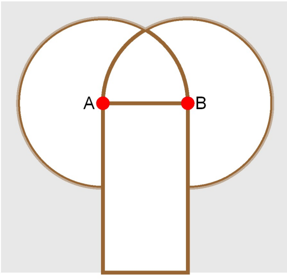


Imagen 5. Generación del arco gótico (imagen propia)

Una bóveda de crucería se divide en cuatro partes iguales por medio de seis arcos (dos arcos fajones en la nave, dos arcos formeros en los muros y dos arcos cruzados) además de dos aristas en forma de cruz atravesando la clave (dovela central).

Imagen 6. Bóveda de crucería (imagen propia)

Se supone un tramo de bóveda cuatripartita formada a partir de arcos con forma de *vesica piscis* canónica (cada circunferencia pasa por el centro de la otra) contenida en un cuadrado de 10 metros de lado en planta.

Parametrice y represente gráficamente las superficies que constituyen una bóveda gótica como la descrita.

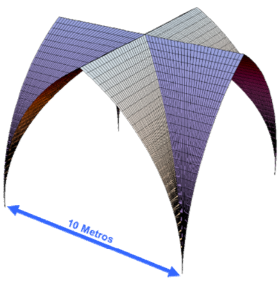


Imagen 7. Simulación de la bóveda (imagen propia)

Ejercicio nº5

Enunciado

San Mamés es el estadio de fútbol del Athletic Club de Bilbao y se encuentra ubicado en la villa de Bilbao. Es obra del arquitecto César Azcarate (ACXT-IDOM), la primera piedra se colocó el 26 de mayo de 2010 y las obras concluyeron a mediados de 2015.

Su cubierta exterior es muy característica y todo un símbolo distintivo de San Mamés. Consta de una envolvente en toda la fachada, compuesta por lamas (paneles) de ETFE (Etileno–TetraFluoroEtileno) en torsión. La altura total del edificio queda fraccionada en cinco niveles coincidentes con los forjados de la estructura de hormigón. En cada uno de estos niveles los paneles se fijan uno junto a otro a una distancia concreta.

Imagen 8 (propia). Envolvente de la fachada del estadio de San Mamés, Bilbao, Bizkaia

Las lamas presentan una configuración de paraboloide hiperbólico, de 5.40 metros de altura y 1.20 metros de anchura de color blanco que constituyen las fachadas como elemento caracterizador del estadio. Cada elemento de lama está formado por una estructura metálica, sus correspondientes anclajes al forjado o vigas perimetrales metálicas y la lámina de ETFE, fijada al bastidor con perfiles de PVC.

Imagen 9. Detalle de las lamas (imagen propia)

Halle la ecuación, en forma paramétrica y cartesiana, y represente gráficamente una de las lamas de la cubierta exterior de San Mamés.