

2. GAIA: ARIKETA EBATZIAK

1. Izan bedi $p(x)$ probabilitate funtzioa duen X zorizko aldagai diskretua:

$$p(x) = \begin{cases} 2m & x = 1 \\ m & x = 2, 3, 4 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

- a) Kalkulatu m konstantearen balioa.
b) Lor bedi X zorizko aldagai diskretuaren funtzio karakteristikoa.
c) Kalkulatu X zorizko aldagai diskretuaren batezbestekoa funtzio karakteristikoa erabiliz.

a)

Probabilitate funtzioa izan dadin:

1) $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m \geq 0$

2) $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1 \Rightarrow 2m + m + m + m = 1; 5m = 1; \boxed{m = \frac{1}{5}}$

b)

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^n e^{itx_k} \cdot p(x_k) = e^{it} \cdot \frac{2}{5} + e^{2it} \cdot \frac{1}{5} + e^{3it} \cdot \frac{1}{5} + e^{4it} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{5}(2e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it})}$$

c)

Batezbestekoa lehenengo ordenako momentua denez:

$$\alpha_1 = \frac{1}{i} \frac{d\Psi(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \frac{1}{5} (2ie^{it} + 2ie^{2it} + 3ie^{3it} + 4ie^{4it}) \Big|_{t=0} = \frac{1}{5} (2 + 2 + 3 + 4) = \boxed{\frac{11}{5}}$$

2. Erreakzio kimiko baten zinetika aztertu egin nahi da eta erreaktiboaren kontsumoa (mol/min) ondorengo dentsitate funtzioa dagokion zorizko aldagai jarraitua dela ikusi da.

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Zein da k konstantearen balioa, $f(x)$ dentsitate-funtzioa izan dadin?
b) Lor bedi zorizko aldagai jarraituaren banaketa funtzioa.
c) Kalkulatu erreakzioaren abiadura 10 mol/min (erreaktibo kontsumoa) baino azkarrago izateko probabilitatea.

a)

Dentsitate-funtzioa izan dadin:

$$1) f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow k \geq 0$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} ke^{-x} dx = 1; \quad 0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t ke^{-x} dx = 1; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} -ke^{-x} \Big|_0^t = 1; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (-ke^{-t} + ke^0) = 1$$

$$\boxed{k = 1}$$

b)

$$x \leq 0:$$

$$x > 0:$$

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0 \quad ; \quad \int_0^x f(t) dt = \int_0^x e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^x = 1 - e^{-x}$$

Beraz, banaketa funtzioa:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

c)

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-10}) = \boxed{e^{-10}}$$

3. X zorizko aldagai diskretu batek probabilitate berdinarekin $-1, 0$ eta 1 balioak har ditzake.
- a) Aurkitu X aldagaiaren momentuen funtzio sortzailea.
- b) Kalkulatu X aldagaiaren jatorriarekiko lehenengo lau momentuak.

a)

$$\alpha(w) = E(e^{wx}) = e^{w(-1)} \left(\frac{1}{3} \right) + e^{w(0)} \left(\frac{1}{3} \right) + e^{w(1)} \left(\frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{1}{3}(1 + e^{-w} + e^w)}$$

- b) Jatorriarekiko momentuak lortzeko funtzio sortzailea deribatu eta $w=0$ denerako ebaluatuko da.

Lehenengo ordenako momentua: $\left. \frac{dE(e^{wx})}{dw} \right|_{w=0} = \frac{1}{3} (0 - e^{-w} + e^w) \Big|_{w=0} = 0$

Bigarren ordenako momentua: $\left. \frac{d^2 E(e^{wx})}{dw^2} \right|_{w=0} = \frac{1}{3} (0 + e^{-w} + e^w) \Big|_{w=0} = \frac{2}{3}$

Hirugarren ordenako momentua: $\left. \frac{d^3 E(e^{wx})}{dw^3} \right|_{w=0} = \frac{1}{3} (0 - e^{-w} + e^w) \Big|_{w=0} = 0$

Laugarren ordenako momentua: $\left. \frac{d^4 E(e^{wx})}{dw^4} \right|_{w=0} = \frac{1}{3} (0 + e^{-w} + e^w) \Big|_{w=0} = \frac{2}{3}$

Ikusi daitekenez, momentu bakoitiak 0 dira eta bikoitiak $\frac{2}{3}$.

4. Izan bedi $f(x)$ dentsitate funtzioa duen X zorizko aldagai jarraitua.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{beste kasuetan} \end{cases}$$

- a) Aurkitu banaketaren funtzio karakteristikoa.
b) Aurkitu banaketaren momentuen funtzio sortzailea.
c) Kalkulatu banaketaren batezbestekoa.

a)

$$\Psi(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{itx} 0 dx + \int_0^3 e^{itx} \frac{1}{3} dx + \int_3^{+\infty} e^{itx} 0 dx = \frac{1}{3} \frac{e^{itx}}{it} \Big|_0^3 = \frac{1}{3it} (e^{3it} - e^{0it}) = \boxed{\frac{e^{3it} - 1}{3it}}$$

b)

$$\alpha(w) = E(e^{wx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{wx} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{wx} 0 dx + \int_0^3 e^{wx} \frac{1}{3} dx + \int_3^{+\infty} e^{wx} 0 dx = \frac{1}{3} \frac{e^{wx}}{w} \Big|_0^3 = \frac{1}{3w} (e^{3w} - e^{0w}) = \boxed{\frac{e^{3w} - 1}{3w}}$$

c)

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha(w)}{dw} \Big|_{w=0} = \frac{(3e^{3w} \cdot 3w) - ((e^{3w} - 1) \cdot 3)}{9w^2} \Big|_{w=0} = \frac{3(3we^{3w}) - ((e^{3w} - 1))}{9w^2} \Big|_{w=0} = \frac{(3w-1)e^{3w} + 1}{3w^2} \Big|_{w=0} = \frac{0}{0}$$

Indeterminazio bat daukagu beraz, L'Hôpital-en erregela aplikatu behar dugu. Kasu honetan bi aldiz aplikatu behar dugu batezbestekoa lortzeko.

$$\alpha_1 = \frac{(27w+9)e^{3w}}{6} \Big|_{w=0} = \frac{9}{6} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

5. Izan bedi ondorengo funtzio karakteristikoa duen X zorizko aldagaia.



$$\Psi(t) = k + mt + pt^2$$

- a) Kalkulatu k, m eta p , X zorizko aldagaiaren batezbestekoa 1 izan dadin eta bariantza 4.
- b) $2X$ zorizko aldagaiaren funtzio karakteristikoa aurkitu.
- c) $Y = 3X + 2$ aldagaiaren funtzio karakteristikoa aurkitu.

a)

Zero ordenako momentuak 1 balio dutenez:

$$\Psi(0) = k + m0 + p0^2 = k$$

$$\boxed{k = 1}$$

Batezbestekoa legenengo ordenako momentua da beraz:

$$\alpha_1 = \frac{1}{i} \frac{d\Psi(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{i} (m + 2pt) \Big|_{t=0} = \frac{m}{i}$$

Batezbestekoa 1 izan dadin:

$$\frac{m}{i} = 1; \boxed{m = i}$$

Bariantza batezbestekoan zentratutako bigarren ordenako momentua da beraz:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{1}{i^2} \frac{d^2\Psi(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} - 1^2 = -1(2p) \Big|_{t=0} - 1 = -2p - 1$$

Batezbestekoa 4 izan dadin:

$$-2p - 1 = 4; \boxed{p = -\frac{5}{2}}$$

b)

$$\Psi_{2X}(t) = E(e^{it2x}) = 1 + i(2t) - \frac{5}{2}(2t)^2 = \boxed{1 + 2it - 10t^2}$$

c)

$$\Psi_Y(t) = E(e^{ity}) = E(e^{it(3x+2)}) = E(e^{it3x} \cdot e^{2it}) = e^{2it} \cdot \left(1 + i(3t) - \frac{5}{2}(3t)^2\right) = \boxed{e^{2it} \cdot \left(1 + 3it - \frac{45}{2}t^2\right)}$$