CAPITULO XVI. FACTORIZACION DIRECTA DE MATRICES

1. INTRODUCCION Y METODO

La discusión centrada alrededor del Teorema XIII.6 se refirió a la factorización de una matriz A en términos de una matriz triangular inferior L y de una matriz triangular superior U. Esta factorización existe cuando se puede resolver de manera única el sistema lineal $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por eliminación Gaussiana sin intercambios de filas o columnas. El sistema $L\,U\,\mathbf{x} = A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede transformarse entonces en el sistema $U\,\mathbf{x} = L^{-1}\,\mathbf{b}$ y como U es triangular superior, se puede aplicar una sustitución hacia atrás. Aún cuando las formas específicas de L y U se pueden obtener del proceso de eliminación Gaussiana, es deseable encontrar un método más directo para su determinación, para que, si fuera necesaria la solución de varios sistemas usando A, sólo se necesitaría realizar una sustitución hacia adelante y otra hacia atrás. Para ilustrar un procedimiento para calcular los elementos de estas matrices, consideremos un ejemplo.

Ejemplo 1.

Considere la matriz estrictamente dominante diagonalmente de 4×4:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Los Teoremas XIII.6 y XIII.8 garantizan que A se puede factorizar en la forma $A = L\,U$, donde:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} .$$

Los 16 elementos conocidos de A se pueden usar para determinar parcialmente los diez elementos desconocidos de L y el mismo número de U. Sin embargo si el procedimiento nos debe llevar a una solución única, se necesitan cuatro condiciones adicionales para los elementos de L y de U. El método a usar en este ejemplo consiste en requerir arbitrariamente que $l_{11} = l_{22} = l_{33} = l_{44} = 1$, y se conoce como el **método de Doolittle**. Más adelante en este capítulo, se considerarán métodos que requieren que todos los elementos de la diagonal de U sean uno (**método de Crout**) y que $l_{ii} = u_{ii}$ para cada valor de i (**método de Choleski**).

La parte de la multiplicación de L con U,

$$L\,U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A ,$$

que determina la primera fila de A, da lugar a las cuatro ecuaciones

$$u_{11} = 6 \ , \quad u_{12} = 2 \ , \quad u_{13} = 1 \ , \quad u_{14} = -1 \ .$$

La parte de la multiplicación de L con U que determina los elementos restantes de la primera columna de A da las ecuaciones

$$l_{21}\ u_{11} = 2 \ , \quad l_{31}\ u_{11} = 1 \ , \quad l_{41}\ u_{11} = -1 \ ,$$

y entonces

$$l_{21} = \frac{1}{3} \ , \quad l_{31} = \frac{1}{6} \ , \quad l_{41} = -\frac{1}{6} \ .$$

Hasta aquí las matrices L y U asumen la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & l_{32} & 1 & 0 \\ -1/6 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} \ .$$

La parte de la multiplicación que determina los elementos restantes en la segunda fila de A lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} l_{21}\ u_{12} + u_{22} &= \frac{2}{3} + u_{22} = 4 \ , \\ l_{21}\ u_{13} + u_{23} &= \frac{1}{3} + u_{23} = 1 \ , \\ l_{21}\ u_{14} + u_{24} &= -\frac{1}{3} + u_{24} = 0 \ , \end{aligned}$$

así que

$$u_{22} = \frac{10}{3} \ , \quad u_{23} = \frac{2}{3} \ , \quad u_{24} = \frac{1}{3} \ ;$$

y la que determina los elementos restantes de la segunda columna de A da

$$\begin{aligned} l_{31}\ u_{12} + l_{32}\ u_{22} &= \frac{2}{6} + \frac{10}{3}\ l_{32} = 1 \ , \\ l_{41}\ u_{12} + l_{32}\ u_{22} &= -\frac{2}{6} + \frac{10}{3}\ l_{42} = 0 \ , \end{aligned}$$

así que

$$l_{32} = \frac{1}{5} \ , \quad l_{42} = \frac{1}{10} \ .$$

Ahora las matrices L y U tienen la forma:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/5 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/10 & l_{43} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 10/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} \ .$$

La parte de la multiplicación que determina los elementos restantes en la tercera fila de A lleva a las ecuaciones

$$l_{31}\ u_{13} + l_{32}\ u_{23} + u_{33} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + u_{33} = 4\ ,$$
$$l_{31}\ u_{14} + l_{32}\ u_{24} + u_{34} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + u_{34} = -1\ ,$$

así que

$$u_{33} = \frac{37}{10} \quad \text{y} \quad u_{34} = -\frac{9}{10}\ ;$$

y la que determina los elementos restantes de la tercera columna de A da

$$l_{41}\ u_{13} + l_{42}\ u_{23} + l_{43}\ u_{33} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\ \frac{2}{3} + \frac{37}{10}\ l_{43} = -1\ ,$$

así que

$$l_{43} = -\frac{9}{37}\ .$$

Y finalmente, la última ecuación es:

$$l_{41}\ u_{14} + l_{42}\ u_{24} + l_{43}\ u_{34} + u_{44} = -\frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} - \frac{9}{37}\ (-\frac{9}{10}) + u_{44} = 3\ ,$$

así que

$$u_{4u} = \frac{191}{74}\ ;$$

para obtener finalmente:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{pmatrix}\ .$$

2. LOS ALGORITMOS DE DOOLITTLE Y DE CROUT

En el siguiente algoritmo de factorización directa está contenido un procedimiento general para **factorizar matrices** en un producto de **matrices triangulares**. Aunque se construyen nuevas matrices L y U, los valores generados pueden reemplazar a los elementos correspondientes de A que no son ya necesarios. Por lo tanto, la nueva matriz tiene elementos $a_{ij} = l_{ij}$ para cada $i = 2, 3, \ldots, n$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, i-1$; y $a_{ij} = u_{ij}$ para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y $j = i, i+1, \ldots, n$.

Algoritmo de factorización directa de Doolittle o de Crout.

==

Para factorizar una matriz $A = (a_{ij})$ de $n \times n$ en el producto de la matriz triangular inferior $L = (l_{ij})$ con la matriz triangular superior $U = (u_{ij})$; esto es, $A = L\ U$, donde está dada la diagonal principal de L ó U.

Entrada: dimensión n; los elementos $a_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$ de A; la diagonal $l_{11}, l_{22}, \ldots, l_{nn}$ de L (método de Doolittle) ó $u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{nn}$ de U (método de Crout).

Salida: los elementos l_{ij}, $1 \leq j \leq i$, $1 \leq i \leq n$ de L y los elementos u_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $i \leq j \leq n$, de U.

Paso 1: Seleccionar l_{11} y u_{11} satisfaciendo $l_{11}\ u_{11} = a_{11}$.
Si $l_{11}\ u_{11} = 0$ entonces SALIDA; *(factorización imposible)* PARAR.

Paso 2: Para $j = 2, 3, \ldots, n$ tomar
$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$; *(primera fila de U)*;
$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}$; *(primera columna de L)*.

Paso 3: Para $i = 2, 3, \ldots, n-1$ seguir los pasos 4 y 5.

Paso 4: Seleccionar l_{ii} y u_{ii} satisfaciendo $l_{ii}\ u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\ u_{ki}$.
Si $l_{ii}\ u_{ii} = 0$ entonces SALIDA; *(factorización imposible)* PARAR.

Paso 5: Para $j = i+1, i+2, \ldots, n$ tomar
$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\ [a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\ u_{kj}]$; *($i-$ésima fila de U)*;
$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\ [a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}\ u_{ki}]$; *($i-$ésima columna de L)*.

Paso 6: Seleccionar l_{nn} y u_{nn} satisfaciendo $l_{nn}\ u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}\ u_{kn}$.
Si $l_{nn}\ u_{nn} = 0$ entonces $A = L\ U$ pero A es singular.

Paso 7: SALIDA (l_{ij} y u_{ij} para $j = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, n$); PARAR.

==

Una dificultad que puede surgir cuando se usa este algoritmo para obtener la factorización de la matriz de coeficientes de un sistema lineal de ecuaciones es la causada por el hecho de que no se usa pivoteo para reducir el efecto del error de redondeo. Se ha visto en cálculos anteriores que el error de redondeo puede ser muy significativo cuando se usa aritmética de dígitos finitos y que cualquier algoritmo eficiente debe de tomar esto en consideración.

Aún cuando el intercambio de columnas es difícil de incorporar en el algoritmo de factorización, el algoritmo puede alterarse fácilmente para incluir una técnica de intercambio de filas equivalente al procedimiento de pivoteo máximo de columna descrito en el capítulo XV. Este intercambio resulta suficiente en la mayoría de los casos.

El siguiente algoritmo incorpora el procedimiento de factorización del algoritmo de factorización directa junto con el pivoteo máximo de columna y la sustitución hacia adelante y hacia atrás para obtener una solución a un sistema lineal de ecuaciones. El proceso requiere que el sistema lineal $A\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se escriba como $L\ U\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$. La sustitución hacia adelante resuelve el sistema $L\ \mathbf{z} = \mathbf{b}$ y la sustitución hacia atrás resuelve al sistema $U\ \mathbf{x} = L^{-1}\ \mathbf{b} = \mathbf{z}$. Se debe hacer notar que los elementos diferentes de cero de L y U se pueden guardar en los elementos correspondientes de A excepto los de la diagonal de L ó U, la cual debe darse en entrada.

Algoritmo de factorización directa con pivoteo máximo de columna.

==

Para resolver el sistema lineal $n \times n$ $A\ \mathbf{x} = \mathbf{b}$ en la forma:

$$\begin{aligned} E_1 :&\quad a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = a_{1,n+1} \\ E_2 :&\quad a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = a_{2,n+1} \\ &\quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ E_n :&\quad a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nn}\ x_n = a_{n,n+1} \end{aligned}$$

factorizando A en $L\ U$ y resolviendo $L\ \mathbf{z} = \mathbf{b}$ y $U\ \mathbf{x} = \mathbf{z}$ donde se da la diagonal principal de L o U.

Entrada: dimensión n; los elementos a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$ de la matriz ampliada de A; la diagonal $l_{11}, l_{22}, \ldots, l_{nn}$ de L (método de Doolittle) o la diagonal $u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{nn}$ de U (método de Crout).

Salida: solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ó mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

Paso 1: Sea p el menor entero tal que $1 \le p \le n$ y $|a_{p1}| = \max\limits_{1\le j\le n} |a_{j1}|$; *(encontrar el primer elemento pivote).*
Si $|a_{p1}| = 0$ SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR.

Paso 2: Si $p \neq 1$ entonces intercambiar las filas p y 1 en A.

Paso 3: Seleccionar l_{11} y u_{11} satisfaciendo $l_{11}\ u_{11} = a_{11}$.

Paso 4: Para $j = 2, 3, \ldots, n$ tomar
$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$; *(primera fila de U)*;
$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}$; *(primera columna de L).*

Paso 5: Para $i = 2, 3, \ldots, n-1$ seguir los pasos 6–9.

Paso 6: Sea p el menor entero tal que $i \le p \le n$ y

$$\left| a_{pi} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{pk}\ u_{ki} \right| = \max_{i\le j\le n} \left| a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}\ u_{ki} \right| ;$$

(encontrar el i−ésimo elemento pivote).
Si el máximo es cero entonces SALIDA;
(no existe solución única) PARAR.

Paso 7: Si $p \neq i$ entonces intercambiar las filas p e i en la matriz A e intercambiar los elementos de las filas p e i de las primeras $(i-1)$ columnas de L.

Paso 8: Seleccionar l_{ii} y u_{ii} satisfaciendo $l_{ii}\ u_{ii} = a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}\ u_{ki}$.

Paso 9: Para $j = i+1, i+2, \ldots, n$ tomar

$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\ [a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}\ u_{kj}]$; *(i−ésima fila de U)*;

$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\ [a_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{jk}\ u_{ki}]$; *(i−ésima columna de L).*

Paso 10: Tomar $AUX = a_{nn} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} l_{nk}\ u_{kn}$.
Si $AUX = 0$ entonces SALIDA; *(no existe solución única)* PARAR.
Seleccionar l_{nn} y u_{nn} que satisfagan $l_{nn}\ u_{nn} = a_{nn} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} l_{nk}\ u_{kn}$.

(Los pasos 11 y 12 resuelven el sistema triangular inferior $L\ \mathbf{z} = \mathbf{b}$.)

Paso 11: Tomar $z_1 = \frac{a_{1,n+1}}{l_{11}}$.

Paso 12: Para $i = 2, 3, \ldots, n$ tomar

$$z_i = \frac{1}{l_{ii}}\ [a_{i,n+1} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\ z_j].$$

(Los pasos 13 y 14 resuelven el sistema triangular superior $U\ \mathbf{x} = \mathbf{z}$.)

Paso 13: Tomar $x_n = \frac{z_n}{u_{nn}}$.

Paso 14: Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ tomar

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\ [z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\ x_j].$$

Paso 15: SALIDA $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR.

==

Ejemplo 2.

Para ilustrar el procedimiento seguido en el algoritmo de factorización directa con pivoteo máximo de columna, consideremos el sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1.00\ x_1 & + & 0.333\ x_2 & + & 1.50\ x_3 & - & 0.333\ x_4 & = & 3.00\ , \\ -2.01\ x_1 & + & 1.45\ x_2 & + & 0.50\ x_3 & + & 2.95\ x_4 & = & 5.40\ , \\ 4.32\ x_1 & - & 1.95\ x_2 & & & + & 2.08\ x_4 & = & 0.13\ , \\ 5.11\ x_1 & - & 4.00\ x_2 & + & 3.33\ x_3 & - & 1.11\ x_4 & = & 3.77\ . \end{array}$$

Seguiremos los pasos del algoritmo de factorización directa con pivoteo máximo de columna con $l_{11} = l_{22} = l_{33} = l_{44} = 1$, usando aritmética de redondeo a tres dígitos. En primer lugar escribimos la matriz ampliada:

$$A_a = [A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.333 & 1.50 & -0.333 & | & 3.00 \\ -2.01 & 1.45 & 0.50 & 2.95 & | & 5.40 \\ 4.32 & -1.95 & 0.00 & 2.08 & | & 0.13 \\ 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 & | & 3.77 \end{pmatrix}\ .$$

Además, las matrices triangular inferior L y triangular superior U son:

$$L = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1.00 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1.00 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1.00 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}\ .$$

Paso 1: Tenemos que encontrar el primer elemento pivote, es decir, el menor entero p tal que $1 \le p \le n$ y $|a_{p1}| = \max\limits_{1\le j\le n} |a_{j1}|$. En nuestro caso

$$p = 4\ .$$

Paso 2: Dado que $p \ne 1$, entonces tenemos que intercambiar las filas $p = 4$ y 1 en A. La matriz ampliada se transforma en

$$[A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 & | & 3.77 \\ -2.01 & 1.45 & 0.50 & 2.95 & | & 5.40 \\ 4.32 & -1.95 & 0.00 & 2.08 & | & 0.13 \\ 1.00 & 0.333 & 1.50 & -0.333 & | & 3.00 \end{pmatrix}\ .$$

Paso 3: Se necesita seleccionar l_{11} y u_{11} satisfaciendo $l_{11}\ u_{11} = a_{11} = 5.11$. Y como $l_{11} = 1.00$,

$$u_{11} = 5.11$$

Paso 4: Para $j = 2, 3, 4$ debemos tomar $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$ y $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}}$.
Es decir,

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = -4.00\ , \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 3.33\ , \quad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = -1.11\ ,$$

y

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{-2.01}{5.11} = -0.393\ , \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{4.32}{5.11} = 0.845\ , \\ l_{41} &= \frac{a_{41}}{u_{11}} = \frac{1.00}{5.11} = 0.196\ . \end{aligned}$$

Entonces, las matrices L y U asumen la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ -0.393 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0.845 & l_{32} & 1.00 & 0 \\ 0.196 & l_{42} & l_{43} & 1.00 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} .$$

Paso 5: Para $i = 2$ seguir los pasos 6–9.

Paso 6: Ahora tenemos que encontrar el segundo elemento pivote, es decir, encontrar el menor entero p tal que $2 \leq p \leq 4$ y

$$|a_{p2} - l_{p1}\ u_{12}| = \max_{2\leq j\leq 4} |a_{j2} - l_{j1}\ u_{12}|\ .$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned} |a_{22} - l_{21}\ u_{12}| &= |1.45 - (-0.393)(-4.00)| = |-0.12| = 0.12\ , \\ |a_{32} - l_{31}\ u_{12}| &= |-1.95 - (0.845)(-4.00)| = |1.43| = 1.43\ , \\ |a_{42} - l_{41}\ u_{12}| &= |0.333 - (0.196)(-4.00)| = |1.12| = 1.12\ . \end{aligned}$$

Así, $p = 3$.

Paso 7: Dado que $p = 3 \neq 2 = i$, tenemos que intercambiar las filas $p = 3$ e $i = 2$ en la matriz A e intercambiar los elementos de las filas $p = 3$ e $i = 2$ de la primera columna de L. Entonces,

$$[A, \mathbf{b}] = \left(\begin{array}{cccc|c} 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 & 3.77 \\ 4.32 & -1.95 & 0.00 & 2.08 & 0.13 \\ -2.01 & 1.45 & 0.50 & 2.95 & 5.40 \\ 1.00 & 0.333 & 1.50 & -0.333 & 3.00 \end{array}\right) ,$$

$$L = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.845 & 1.00 & 0 & 0 \\ -0.393 & l_{32} & 1.00 & 0 \\ 0.196 & l_{42} & l_{43} & 1.00 \end{pmatrix} .$$

Paso 8: Tenemos que seleccionar l_{22} y u_{22} satisfaciendo

$$l_{22}\ u_{22} = a_{22} - l_{21}\ u_{12}\ .$$

Dado que $l_{22} = 1.00$, entonces

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}\ u_{12} = -1.95 - (0.845)(-4.00) = 1.43\ .$$

Paso 9: Para $j = 3, 4$ tenemos que tomar

$$u_{2j} = \frac{1}{l_{22}}\ [a_{2j} - l_{2k}\ u_{kj}]$$

$$l_{j2} = \frac{1}{u_{22}}\ [a_{j2} - l_{jk}\ u_{k2}]$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
u_{23} &= \frac{1}{l_{22}}\ [a_{23} - l_{21}\ u_{13}] = [0.00 - (0.845)(3.33)] = -2.81\ ,\\
u_{24} &= \frac{1}{l_{22}}\ [a_{24} - l_{21}\ u_{14}] = [2.08 - (0.845)(-1.11)] = 3.01\ ,\\
l_{32} &= \frac{1}{u_{22}}\ [a_{32} - l_{31}\ u_{12}] = \frac{1}{1.43}\ [1.45 - (-0.393)(-4.00)] = -0.0839\ ,\\
l_{42} &= \frac{1}{u_{22}}\ [a_{42} - l_{41}\ u_{12}] = \frac{1}{1.43}\ [0.333 - (0.196)(-4.00)] = 0.783\ .
\end{aligned}$$

Entonces, las matrices L y U asumen la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0\\ 0.845 & 1.00 & 0 & 0\\ -0.393 & -0.0839 & 1.00 & 0\\ 0.196 & 0.783 & l_{43} & 1.00 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11\\ 0 & 1.43 & -2.81 & 3.02\\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34}\\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}\ .$$

Paso 5: Para $i = 3$ seguir los pasos 6–9.

Paso 6: Ahora tenemos que encontrar el tercer elemento pivote, es decir, encontrar el menor entero p tal que $3 \le p \le 4$ y

$$|a_{p3} - \sum_{k=1}^{2} l_{pk}\ u_{k3}| = \max_{3\le j\le 4} |a_{j3} - \sum_{k=1}^{2} l_{jk}\ u_{k3}|\ .$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
|a_{33} - (l_{31}\ u_{13} + l_{32}\ u_{23})| &= |0.5 - ((-0.393)(3.33) + (-0.0839)(-2.81))| = 1.57\ ,\\
|a_{43} - (l_{41}\ u_{13} + l_{42}\ u_{23})| &= |1.5 - ((0.196)(3.33) + (0.783)(-2.81)))| = 3.05\ .
\end{aligned}$$

Así, $p = 4$.

Paso 7: Dado que $p = 4 \neq 3 = i$, tenemos que intercambiar las filas $p = 5$ y $i = 3$ en la matriz A e intercambiar los elementos de las filas $p = 5$ e $i = 3$ de la primera y segunda columnas de L. Entonces,

$$[A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 & | & 3.77 \\ 4.32 & -1.95 & 0.00 & 2.08 & | & 0.13 \\ 1.00 & 0.333 & 1.50 & -0.333 & | & 3.00 \\ -2.01 & 1.45 & 0.50 & 2.95 & | & 5.40 \end{pmatrix} ,$$

$$L = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.845 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0.196 & 0.783 & 1.00 & 0 \\ -0.393 & -0.0839 & l_{43} & 1.00 \end{pmatrix} .$$

Paso 8: Tenemos que seleccionar l_{33} y u_{33} satisfaciendo

$$l_{33}\ u_{33} = a_{33} - (l_{31}\ u_{13} + l_{32}\ u_{23}) .$$

Dado que $l_{33} = 1.00$, entonces

$$u_{33} = a_{33} - (l_{31}\ u_{13} + l_{32}\ u_{23}) = 1.50 - (0.196)(3.33) + (-0.0839)(-2.81) = 3.05 .$$

Paso 9: Para $j = 4$ tenemos que tomar

$$u_{3j} = \frac{1}{l_{33}}\ [a_{3j} - (l_{31}\ u_{1j} + l_{32}\ u_{2j})]$$

$$l_{j3} = \frac{1}{u_{33}}\ [a_{j3} - (l_{j1}\ u_{13} + l_{j2}\ u_{23})] .$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned} u_{34} &= \frac{1}{l_{33}}\ [a_{34} - (l_{31}\ u_{14} + l_{32}\ u_{24})] \\ &= [-0.333 - ((0.196)(-1.11) + (0.783)(3.02))] = -2.47 , \\ l_{43} &= \frac{1}{u_{33}}\ [a_{43} - (l_{41}\ u_{13} + l_{42}\ u_{23})] \\ &= \frac{1}{3.05}\ [0.5 - ((-0.393)(3.33) + (-0.0839)(-2.81))] = 0.515 . \end{aligned}$$

Entonces, las matrices L y U asumen la forma

$$L = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.845 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0.196 & 0.783 & 1.00 & 0 \\ -0.393 & -0.0839 & 0.515 & 1.00 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 \\ 0 & 1.43 & -2.81 & 3.02 \\ 0 & 0 & 3.05 & -2.47 \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix} .$$

Paso 10: Finalmente, tenemos que seleccionar l_{44} y u_{44} que satisfagan

$$l_{44}\ u_{44} = a_{44} - \sum_{k=1}^{3} l_{4k}\ u_{k4} .$$

Dado que $l_{44} = 1.00$, entonces

$$\begin{aligned} u_{44} &= a_{44} - (l_{41}\ u_{14} + l_{42}\ u_{24} + l_{43}\ u_{23}) \\ &= 2.95 - ((-0.393)(-1.11) + (-0.0839)(3.02) + (0.515)(-2.47)) = 4.04\ . \end{aligned}$$

La factorización está completa:

$$A = \begin{pmatrix} 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 \\ 4.32 & -1.95 & 0.00 & 2.08 \\ 1.00 & 0.333 & 1.50 & -0.333 \\ -2.01 & 1.45 & 0.50 & 2.95 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ 0.845 & 1.00 & 0 & 0 \\ 0.196 & 0.783 & 1.00 & 0 \\ -0.393 & -0.0839 & 0.515 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 \\ 0 & 1.43 & -2.81 & 3.02 \\ 0 & 0 & 3.05 & -2.47 \\ 0 & 0 & 0 & 4.04 \end{pmatrix} .$$

(Los pasos 11 y 12 resuelven el sistema triangular inferior $L\ \mathbf{z} = \mathbf{b}$.)

Paso 11: Tomar $z_1 = \frac{a_{1,5}}{l_{11}} = \frac{3.77}{1.00} = 3.77$.

Paso 12: Para $i = 2, 3, 4$ tomar

$$z_i = \frac{1}{l_{ii}}\ [a_{i,n+1} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\ z_j]\ .$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{l_{22}}\ [a_{25} - l_{21}\ z_1] \\ &= 0.13 - (0.845)(3.77) = -3.06 \\ z_3 &= \frac{1}{l_{33}}\ [a_{35} - (l_{31}\ z_1 + l_{32}\ z_2)] \\ &= 3.00 - ((0.196)(3.77) + (0.783)(-3.06)) = 4.66 \\ z_4 &= \frac{1}{l_{44}}\ [a_{45} - (l_{41}\ z_1 + l_{42}\ z_2 + l_{43}\ z_3)] \\ &= 5.40 - ((-0.393)(3.77) + (-0.0839)(-3.06) + (0.515)(4.66)) = 4.22\ . \end{aligned}$$

(Los pasos 13 y 14 resuelven el sistema triangular superior $U\ \mathbf{x} = \mathbf{z}$.)

Paso 13: Tomar $x_4 = \frac{z_4}{u_{44}} = \frac{4.22}{4.04} = 1.04$.

Paso 14: Para $i = 3, 2, 1$ tomar

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\ [z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\ x_j]\ .$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1}{u_{33}}\ [z_3 - u_{34}\ x_4] \\
&= \frac{1}{3.05}\ [4.66 - (-2.47)(1.04)] = 2.37 \\
x_2 &= \frac{1}{u_{22}}\ [z_2 - (u_{23}\ x_3 + u_{24}\ x_4)] \\
&= \frac{1}{1.43}\ [-3.06 - ((-2.81)(2.37) + (3.02)(1.04))] = 0.322 \\
x_1 &= \frac{1}{u_{33}}\ [z_3 - (u_{12}\ x_2 + u_{13}\ x_3 + u_{14}\ x_4)] \\
&= \frac{1}{5.11}\ [3.77 - ((-4.00)(0.322) + (3.33)(2.37) + (-1.11)(1.04))] = -0.329\ .
\end{aligned}$$

Paso 15: SALIDA. La solución es

$$x_1 = -0.329\ ,\quad x_2 = 0.322\ ,\quad x_3 = 2.37\ ,\quad x_4 = 1.04\ .$$

(procedimiento completado satisfactoriamente) PARAR.

Una aplicación del algoritmo de factorización directa da lugar a la factorización

$$A = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.333 & 1.50 & -0.333 \\ -2.01 & 1.45 & 0.50 & 2.95 \\ 4.32 & -1.95 & 0.00 & 2.08 \\ 5.11 & -4.00 & 3.33 & -1.11 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 \\ -2.01 & 1.00 & 0 & 0 \\ 4.32 & -1.60 & 1.00 & 0 \\ 5.11 & -2.69 & -6.04 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.00 & 0.333 & 1.50 & -0.333 \\ 0 & 2.12 & 3.52 & 2.28 \\ 0 & 0 & -0.85 & 7.17 \\ 0 & 0 & 0 & 50.0 \end{pmatrix}\ .$$

Aplicando entonces los pasos 11 hasta el 15 del algoritmo de factorización directa con pivoteo máximo de columna se obtiene la solución

$$x_1 = -0.370\ ,\quad x_2 = 0.236\ ,\quad x_3 = 2.42\ ,\quad x_4 = 1.03\ .$$

La siguiente tabla compara los resultados del algoritmo de factorización directa con pivoteo máximo de columna, del algoritmo de factorización directa y de la respuesta real a tres dígitos. Nótese la mejoría en la precisión cuando se incluyen intercambios de filas.

Tabla 1

	x_1	x_2	x_3	x_4
Alg. fact. pivoteo	-0.329	0.322	2.37	1.04
Alg. fact. directa	-0.370	0.236	2.42	1.03
Real	-0.324	0.321	2.37	1.04

3. EL ALGORITMO DE CHOLESKY

Cuando se sabe que la matriz real es simétrica y positiva definida, se puede mejorar significativamente la técnica de factorización de una matriz con respecto al número de operaciones aritméticas requeridas.

Teorema XVI.1

Si A es una matriz real de $n \times n$ simétrica y positiva definida, entonces A tiene una factorización de la forma $A = L\ L^t$, donde L es una matriz triangular inferior. La factorización se puede lograr aplicando el algoritmo de factorización directa con $l_{ii} = u_{ii}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para una matriz simétrica y positiva definida, este Teorema se puede usar para simplificar el algoritmo de factorización directa. Además, si se tiene que resolver un sistema lineal representado por una matriz positiva definida, los pasos 1–6 del siguiente algoritmo (**algoritmo de Choleski**) pueden sustituirse por los pasos 1–10 del algoritmo de factorización directa con pivoteo máximo de columna para aprovechar la simplificación que resulta, siempre y cuando u_{ij} sea reemplazado por l_{ij} en los pasos 13 y 14. El procedimiento de factorización se describe en el siguiente algoritmo.

Algoritmo de Choleski.

==

Para factorizar una matriz $n \times n$ simétrica y positiva definida $A = (a_{ij})$ como $A = L\ L^t$, donde L es triangular inferior.

Entrada: dimensión n; los elementos $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ de A.

Salida: los elementos l_{ij}, $1 \leq j \leq i$, $1 \leq i \leq n$ de L; (los elementos de $U = L^t$ son $u_{ij} = l_{ji}$, $i \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n$).

Paso 1: Tomar

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}\ .$$

Paso 2: Para $j = 2, 3, \ldots, n$ tomar

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}\ .$$

Paso 3: Para $i = 2, 3, \ldots, n-1$ seguir los pasos 4 y 5.

Paso 4: Tomar

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}\ .$$

Paso 5: Para $j = i+1, i+2, \ldots, n$ tomar

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}}\ [a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}\ l_{ik}]\ .$$

Paso 6: Tomar

$$l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2}\ .$$

Paso 7: SALIDA (l_{ij} para $j = 1, \ldots, i$ e $i = 1, \ldots, n$); PARAR.

==

La solución de un sistema lineal típico representado por una matriz positiva definida usando el algoritmo de Choleski requiere de

raíces cuadradas

$$n$$

multiplicaciones/divisiones

$$\frac{n^3 + 9\,n^2 + 2\,n}{6}$$

sumas/restas

$$\frac{n^3 + 6\,n^2 - 7\,n}{6} \; .$$

Estas son alrededor de la mitad de las operaciones aritméticas requeridas en el algoritmo de eliminación Gaussiana. La vantaja computacional del método de Choleski depende del número de operaciones que se requieran para determinar los valores de las n raíces cuadradas, el cual, debido a que es un factor lineal con n, decrecerá significativamente conforme n crezca.

Ejemplo 3.

Para ilustrar el procedimiento seguido al aplicar el método de Choleski, consideremos la matriz real, simétrica y definida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{pmatrix} \; .$$

Seguiendo los pasos del algoritmo de Choleski,

Paso 1: Tomamos

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2 \; .$$

Paso 2: Para $j = 2, 3, \ldots, n$ debemos tomar

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}} \; .$$

En nuestro caso es:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-1}{2} = -0.5 \; ,$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5 \; .$$

Paso 3: Para $i = 2$ seguir los pasos 4 y 5.

Paso 4: Tomar

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \; .$$

Es decir, en nuestro caso:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{4.25 - (-0.5)^2} = 2 \ .$$

Paso 5: Para $j = 3$ tomar

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \ [a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \ l_{ik}] \ .$$

Es decir,

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}} \ (a_{32} - l_{31} \ l_{21}) = \frac{1}{2} \ (2.75 - 0.5 \ (-0.5)) = 1.5 \ .$$

Paso 6: Tomar

$$l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2} \ .$$

Es decir,

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{3.5 - (0.5)^2 - (1.5)^2} = 1 \ .$$

Como L es triangular inferior y $U = L^t$, las matrices son:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

4. EL ALGORITMO DE CROUT PARA SISTEMAS TRIDIAGONALES

Los algoritmos de factorización se pueden simplificar considerablemente en el caso de matrices de banda debido al gran número de ceros que aparecen en patrones regulares en estas matrices. Es particularmente interesante observar la forma que los métodos de Crout o Doolittle toman en este caso. Para ilustrar esta situación, supongamos que una matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

pueda factorizarse en las matrices triangulares L y U.

Como A tiene solamente $(3\ n - 2)$ elementos distintos de cero, habrá sólo $(3\ n - 2)$ condiciones para determinar a los elementos de L y U siempre y cuando se obtengan también los elementos cero de A. Supongamos que realmente es posible encontrar las matrices en la forma

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & l_{n-1,n-2} & l_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} ,$$

y

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De esta forma hay $(2\ n-1)$ elementos indeterminados de L y $(n-1)$ elementos indeterminados de U, que en total son iguales, en número, a las condiciones mencionadas arriba y además, los elementos cero de A se obtienen automáticamente.

La multiplicación $A = L\ U$ da, sin contar los elementos cero, las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} \ , \\ a_{i,i-1} &= l_{i,i-1} \ , \quad \text{para cada} \ \ i = 2, 3, \ldots, n \ , \\ a_{ii} &= l_{i,i-1}\ u_{i-1,i} + l_{ii} \ , \quad \text{para cada} \ \ i = 2, 3, \ldots, n \ , \\ a_{i,i+1} &= l_{ii}\ u_{i,i+1} \ , \quad \text{para cada} \ \ i = 1, 2, \ldots, n-1 \ . \end{aligned}$$

Una solución a este sistema de ecuaciones puede encontarse obteniendo primero todos los términos no cero fuera de la diagonal de L, usando la segunda ecuación y luego usando la cuarta y la tercera para obtener alternadamente el resto de los elementos de U y L, los cuales se pueden ir guardando en los elementos correspondientes de A.

A continuación se da un algoritmo completo para resolver un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$ cuya matriz de coeficientes es tridiagonal.

Algoritmo de reducción de Crout para sistemas lineales tridiagonales.

==

Para resolver el sistema lineal tridiagonal de $n \times n$

$$\begin{aligned} E_1 &: a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 &&= a_{1,n+1} \ , \\ E_2 &: a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + a_{23}\ x_3 &&= a_{2,n+1} \ , \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ E_{n-1} &: \quad a_{n-1,n-2}\ x_{n-2} + a_{n-1,n-1}\ x_{n-1} + a_{n-1,n}\ x_n &&= a_{n-1,n+1} \ , \\ E_n &: \quad a_{n,n-1}\ x_{n-1} + a_{nn}\ x_n &&= a_{n,n+1} \ . \end{aligned}$$

el cual se supone tiene solución única.

Entrada: dimensión n; los elementos a_{ij}, $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le n+1$ de A_a.

Salida: solución $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Paso 1: Tomar

$$l_{11} = a_{11} \quad \text{y} \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} \ .$$

Paso 2: Para $i = 2, 3, \ldots, n-1$ tomar
$l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$; ($i-$*ésima fila de* L).
$l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}\ u_{i-1,i}$.
$u_{i,i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{l_{ii}}$; ($(i+1)-$*ésima columna de* U).

Paso 3: Tomar $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}$; ($n-$*ésima fila de* L).
$l_{nn} = a_{nn} - l_{n,n-1}\ u_{n-1,n}$.

(Los pasos 4 y 5 resuelven $L\ \mathbf{z} = \mathbf{b}$*).*

Paso 4: Tomar

$$z_1 = \frac{a_{1,n+1}}{l_{11}} \ .$$

Paso 5: Para $i = 2, 3, \ldots, n$ tomar

$$z_i = \frac{1}{l_{ii}}\ [a_{i,n+1} - l_{i,i-1}\ z_{i-1}] \ .$$

(Los pasos 6 y 7 resuelven $U\ \mathbf{x} = \mathbf{z}$*).*

Paso 6: Tomar

$$x_n = z_n \ .$$

Paso 7: Para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ tomar

$$x_i = z_i - u_{i,i+1}\ x_{i+1} \ .$$

Paso 8: SALIDA $(x_1, x_2, \ldots, x_n\ )$; PARAR.

==

Este algoritmo requiere sólo de $(5\ n - 4)$ multiplicaciones/divisiones y de $(3\ n - 3)$ sumas/restas, y consecuentemente tiene una ventaja computacional considerable sobre los métodos que no consideran la triadiagonalidad de la matriz, especialmente para valores grandes de n.

Ejemplo 4.

Para ilustrar el procedimiento llevado a cabo en el algoritmo de reducción de Crout, consideremos el sistema tridiagonal de ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\ x_1 & - & x_2 & & & & & = & 1 \\ -1\ x_1 & + & 2\ x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2\ x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & - & x_3 & + & 2\ x_4 & = & 1 \end{array}$$

cuya matriz ampliada es:

$$[A, \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Seguiendo los pasos del algoritmo de reducción de Crout,

Paso 1: Tomar

$$l_{11} = a_{11} = 2 \quad \text{y} \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = -\frac{1}{2} \; .$$

Paso 2: Para $i = 2, 3$ tomar

$l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$; ($i-$*ésima fila de* L).

$l_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}\; u_{i-1,i}$.

$u_{i,i+1} = \frac{a_{i,i+1}}{l_{ii}}$; (($i+1$)$-$*ésima columna de* U).

Es decir, en nuestro caso:

$i = 2$

$$\begin{aligned} l_{21} &= a_{21} = -1 \; ; \\ l_{22} &= a_{22} - l_{21}\; u_{12} = 2 - (-1)(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \; ; \\ u_{23} &= \frac{a_{23}}{l_{22}} = -\frac{1}{3/2} = -\frac{2}{3} \; ; \end{aligned}$$

$i = 3$

$$\begin{aligned} l_{32} &= a_{32} = -1 \; ; \\ l_{33} &= a_{33} - l_{32}\; u_{23} = 2 - (-1)(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \; ; \\ u_{34} &= \frac{a_{34}}{l_{33}} = -\frac{3}{4} \; . \end{aligned}$$

Paso 3: Tomar

$$\begin{aligned} l_{43} &= a_{43} = -1 \; ; \\ l_{44} &= a_{44} - l_{43}\; u_{34} = 2 - (-1)(-\frac{3}{4}) = \frac{5}{4} \; . \end{aligned}$$

(Los pasos 4 y 5 resuelven $L\,\mathbf{z} = \mathbf{b}$).

Paso 4: Tomar

$$z_1 = \frac{a_{1,5}}{l_{11}} = \frac{1}{2} \; .$$

Paso 5: Para $i = 2, 3, 4$ tomar

$$z_i = \frac{1}{l_{ii}}\; [a_{i,n+1} - l_{i,i-1}\; z_{i-1}] \; .$$

Es decir,

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{l_{22}}\; [a_{25} - l_{21}\; z_1] = \frac{0 - (-1)(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \; , \\ z_3 &= \frac{1}{l_{33}}\; [a_{35} - l_{32}\; z_2] = \frac{0 - (-1)(\frac{1}{3})}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} \; , \\ z_4 &= \frac{1}{l_{44}}\; [a_{45} - l_{43}\; z_3] = \frac{1 - (-1)(\frac{1}{4})}{\frac{5}{4}} = 1 \; . \end{aligned}$$

(Los pasos 6 y 7 resuelven $U\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$).

Paso 6: Tomar

$$x_4 = z_4 = 1 \ .$$

Paso 7: Para $i = 3, 2, 1$ tomar

$$x_i = z_i - u_{i,i+1}\ x_{i+1} \ .$$

Es decir,

$$x_3 = z_3 - u_{34}\ x_4 = \frac{1}{4} - (-\frac{3}{4}) = 1 \ ,$$
$$x_2 = z_2 - u_{23}\ x_3 = \frac{1}{3} - (-\frac{2}{3}) = 1 \ ,$$
$$x_1 = z_1 - u_{12}\ x_2 = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1 \ .$$

El algoritmo factorizó la matriz en

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

y dió la solución correcta

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1 \ .$$

El algoritmo de reducción de Crout para sistemas lineales tridiagonales puede aplicarse cuando $l_{ii} \neq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Dos condiciones, cualquiera de las cuales asegurará que esto es cierto, son que la matriz de coeficientes del sistema sea positiva definida o que sea estrictamente dominante diagonalmente. Una condición adicional que garantiza que este algoritmo se puede aplicar está dada en el siguiente Teorema.

Teorema XVI.2

Supóngase que $A = (a_{ij})$ es tridiagonal con $a_{i,i-1} \cdot a_{i,i+1} \neq 0$ para cada $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Si $|a_{11}| > |a_{12}|$, $|a_{ii}| > |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|$ para cada $i = 2, 3, \ldots, n-1$, y $|a_{nn}| > |a_{n,n-1}|$, entonces A es no singular y los valores de l_{ii} descritos en el algoritmo de reducción de Crout son diferentes de cero para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

EJERCICIOS.

1. Factorizar las siguientes matrices en la descomposición $L\ U$ usando el algoritmo de Doolittle con $l_{ii} = 1$ para cada i:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 & -1.5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -4.5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Resolver los siguientes sistemas lineales usando el algoritmo de factorización directa con pivoteo máximo de columna con $l_{ii} = 1$:

$$a)\quad \begin{aligned} 2\,x_1 - x_2 + x_3 &= -1\ , \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + 9\,x_3 &= 0\ , \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 &= 4\ . \end{aligned}$$

$$b)\quad \begin{aligned} 2\,x_1 - 1.5\,x_2 + 3\,x_3 &= 1\ , \\ -\,x_1 + 2\,x_3 &= 3\ , \\ 4\,x_1 - 4.5\,x_2 + 5\,x_3 &= -1\ . \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} 1.012\,x_1 - 2.132\,x_2 + 3.104\,x_3 &= 1.984\ , \\ -2.132\,x_1 + 4.096\,x_2 - 7.013\,x_3 &= -5.049\ , \\ 3.104\,x_1 - 7.013\,x_2 + 0.014\,x_3 &= -3.895\ . \end{aligned}$$

$$d)\quad \begin{aligned} 2\,x_1 &= 3\ , \\ x_1 + 1.5\,x_2 &= 4.5\ , \\ -\,3\,x_2 + 0.5\,x_3 &= -6.6\ , \\ 2\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8\ . \end{aligned}$$

3. Usar el algoritmo de Cholesky para encontrar una factorización de la forma $A = L\ L^t$ para las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Resolver los siguientes sistemas lineales tridiagonales usando el algoritmo de reducción de Crout:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & = & 0\ , \\ -2\ x_1 & + & 4\ x_2 & - & 2\ x_3 & = & -1\ , \\ & - & x_2 & + & 2\ x_3 & = & 1.5\ . \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3\ x_1 & + & x_2 & & & = & -1\ , \\ 2\ x_1 & + & 4\ x_2 & + & x_3 & = & 7\ , \\ & & 2\ x_2 & + & 5\ x_3 & = & 9\ . \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\ x_1 & - & x_2 & & & = & 3\ , \\ -\ x_1 & + & 2\ x_2 & - & x_3 & = & -3\ , \\ & - & x_2 & + & 2\ x_3 & = & 1\ . \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 0.5\ x_1 & + & 0.25\ x_2 & & & & & = & 0.35\ , \\ 0.35\ x_1 & + & 0.8\ x_2 & + & 0.4\ x_3 & & & = & 0.77\ , \\ & & 0.25\ x_2 & + & x_3 & + & 0.5\ x_4 & = & -0.5\ , \\ & & & & x_3 & - & 2\ x_4 & = & -2.25\ . \end{array}$$