Autoebaluazioa: Azterketa ereduaren ebazpena

Ariketa 1. *Ebazpena:*

(i) *Oinarrizko pausua. Lehenengo eta behin, ohartu $P(1)$ egia dela: $2^1 \leq 2^{1+1}$, zeren eta $2^1 = 2$, $2^{1+1} = 4$ eta $2 \leq 4$ dira.*

(ii) *Indukziozko pausua. Frogatu $\forall k \in \mathbb{N}[P(k) \Longrightarrow P(k+1)]$. Demagun $P(k)$ egia dela, hau da, demagun $2^k \leq 2^{k+1}$ egia dela (hipotesia). Froga dezagun orain $P(k+1)$ dela, hau da, froga dezagun $2^{k+1} \leq 2^{k+1+1} = 2^{k+2}$ dela. Horretarako, gure hipotesiaren desberdintzaren alde biak 2 zenbakiagatik biderkatzen ditugu, eta $2^k.2 \leq 2^{k+1}.2$ lortzen dugu, hau da, $2^{k+1} \leq 2^{k+2}$, nahi genuen bezala.*

Ariketa 2. *Ebazpena:*
Ondokoa dugu, $imf = [0, +\infty)$, $f([0, 2]) = [0, 4]$, $f([2, +\infty)) = [4, +\infty)$, $f((-\infty, -1) \cup [2, +\infty)) = (1, +\infty)$, $f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(-1) = \emptyset$, $f^{-1}([-1, 0]) = \{0\}$ eta $f^{-1}((1, +\infty)) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Ariketa 3. *Ebazpena:*
$\overline{(a,b)} = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\}$ *eta zatikien multzoa* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\Re = \mathbb{Q}$ *da.*

Ariketa 4. *Ebazpena: Bi hiruki desberdinak izateko, behintzat erpin bat desberdina izan behar dute. Bestalde, kasu honetan hartzen ditugun erpinen ordenak ez du eraginik aukeraketan. Beraz,*

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$$

Ariketa 5. *Ebazpena: Hasteko balio absolutua desegin. Orduan $-4 < \frac{x-3}{x+2}$ eta $\frac{x-3}{x+2} < 4$ ditugu. Batetik,*

$$\begin{aligned} -4 < \frac{x-3}{x+2} &\iff 0 < \frac{x-3}{x+2} + 4 \\ &\iff 0 < \frac{x-3+4x+8}{x+2} \\ &\iff 0 < \frac{5(x+1)}{x+2} \end{aligned}$$

Bestetik,

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{x+2}<4 &\iff \frac{x-3}{x+2}-4<0\\ &\iff \frac{x-3-4x-8}{x+2}<0\\ &\iff 0<\frac{-(3x+11)}{x+2}\end{aligned}$$

Tarte bakoitzeko positibo eta negatibotasuna aztertuz, $x \in \left(-\infty\,,\,-\frac{11}{3}\right)\cup(-1,\,\infty\,)$ *lortzen da.*

Ariketa 6. *Ebazpena:*

Hau da, kalkulatu behar dira $-\sqrt{3}+i$ *zenbaki konplexuaren bostgarren erroak. Horretarako idatzi* $z_0=-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ *moduan. Orain* z_0*-ren bostgarren erro bat,* $\alpha=2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ *izan daiteke. Baldin eta* w *unitatearen bostgarren erro bat bada, orduan* $(\alpha.w)^5=\alpha^5w^5=\alpha^5=z_0$ *da. Beraz,* $\alpha.w$ *baita ere,* z_0*-ren bostgarren erro bat da. Beraz,* $-\sqrt{3}+i$*-ren bostgarren erroak ondokoak dira,*

$$\alpha, \alpha e^{i\frac{2\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{4\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{6\pi}{5}}, \alpha e^{i\frac{8\pi}{5}}.$$

Hain zuzen ere, z_0*-ren bostgarren erroak diren bost erro daude. Baldin eta* β*,* z_0*-ren beste bostgarren erro bat bada, orduan* $\beta^5=\alpha^5=z_0$ *da. Hemendik* $\frac{\beta^5}{\alpha^5}=1$ *dugu eta honek,* $\frac{\beta}{\alpha}=w$ *unitatearen bostgarren erro bat dela esan nahi du, eta ondorioz* $\beta=\alpha w$ *adierazpena aurreko zerrendan dagoela.*

Beraz, $(-\sqrt{3}+i)$*-ren bostgarren erro guztiak ondokoak dira,*

$$2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{\pi}{6}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{17\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{29\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{41\pi}{30}}, 2^{\frac{1}{5}}e^{i\frac{53\pi}{30}}.$$

Ariketa 7. *Ebazpena: Baldin eta zatitzen bada a, 3-gatik, orduan hondar posible bakarrak 0, 1 edo 2 dira. Hau da, hiru aukera existitzen dira:*

(i) $a=3q$*, orduan* $a^2=9q^2=3(3q^2)=3k$*;*

(ii) $a=3q+1$*, orduan* $a^2=9q^2+6q+1=3(3q^2+2q)+1=3k+1$*;*

(iii) $a=3q+2$*, orduan* $a^2=9q^2+12q+4=3(3q^2+4q+1)+1=3k+1$*.*

Ariketa 8. *Ebazpena: Kongruentzia lengoaian,* 0 *eta* 12 *artean dagoen* r *zenbaki oso bat aurkitu behar da, zeinentzat* $n\equiv r(mod\ 12)$*, hau da,* n *erreduzitu behar da* 12 *modulura. Lehenengo eta behin ohartu* $4!=24\equiv 0(mod\ 12)$ *dela, eta ondorioz* $k\geq 4$ *bada,*

$$k!=k(k-1)\dots 6\cdot 5\cdot 4!\equiv k(k-1)\dots 6\cdot 5\cdot 0\equiv 0(mod\ 12).$$

Beraz, $n\equiv 1!+2!+3!(mod\ 12)$*, eta ondorioz* $n\equiv 9(mod\ 12)$*.*

Ariketa 9. *Ebazpena: Ohartu* $f(x)=x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ *dela, eta* x^2+x+1 *polinomioak ez dituela errorik* $\mathbb{R}$ *gorputzean.*