5. Gaia: Zenbaki konplexuak eta trigonometria

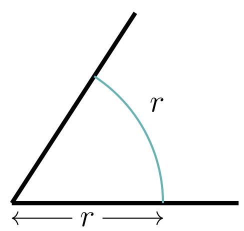
5.1 Trigonometria

Trigonometriaren oinarrizko hainbat definizio eta erlazio ikusiko ditugu atal honetan. Trigonometria angeluak neurtzeaz eta angelu horieen propietateez arduratzen da.

Graduak eta radianak

Angeluak neurtzeko hainbat modu daude, baina erabilienak graduak eta radianak dira. Graduen kasuan, biraketa oso batek 360° dituela suposatzen da, eta beraz gradu bat biraketa osoa zati 360 da.

Radianen kasuan aldiz, r erradioko zirkunferentzian r luzeera ibili ondoren lortutako angeluak definitzen du radian bat.

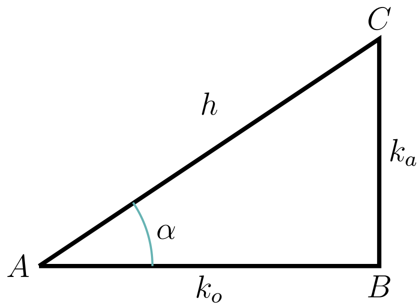


Orokorrean, l luzera ibili ondoren sortutako angelua radianetan l/r da. Horregatik, bira erdia eman dugunean, adibidez, zirkunferentzian πr distantzia ibili dugu, eta angelua, beraz, π radianekoa da. Horrela $180^\circ = \pi$ radian dira.

Matematikan orokorrean radianak erabiliko ditugu beti.

Erlazio trigonometrikoak

Demagun triangelu zuzen bat daukagula, hau da, hiru angeluetako bat zuzena daukan triangelua (kasu honetan B erpinean dago angelu zuzena):



Non k_a-k aurkako kateto esan nahi duen, k_o-k ondoko kateto eta h-k hipotenusa.

Definizioa 5.1.1. Arrazoi trigonometriko nagusiak honela definitzen dira:

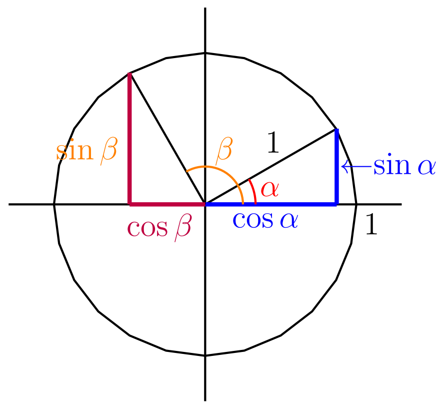
(i) α *angeluaren sinua*: $\sin\alpha = \frac{k_a}{h}$,

(ii) α *angeluaren kosinua*: $\cos\alpha = \frac{k_o}{h}$,

(iii) α *angeluaren tangentea*: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{k_a}{k_o}$.

Zenbait formula trigonometriko

Ezaguna da 1 erradioko zirkunferentzian erraz deskriba daitezkeela arrazoi trigonometriko nagusiak, bai eta beraien hainbat propietate eta erlazio ondorioztatu ere.



Ondoren hainbat formula trigonometriko zerrendatzen ditugu:

(i) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

(ii) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$,

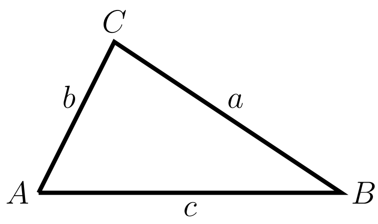
(iii) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,

Bukatzeko, triangeluekin loturiko hiru teorema garrantzitsuren enuntziatua emango dugu.

Teorema 5.1.2 (Pitagorasen teorema)**.** *Izan bedi T triangelu zuzena, k_a eta k_o aurkako eta ondoko katetoak izanik eta h hipotenusa. Orduan*

$$k_a^2 + k_o^2 = h^2.$$

Teorema 5.1.3 (Sinua eta kosinuaren teoremak)**.** *Izan bedi T edozein triangelu, non aldeak eta erpinak honela izendatzen ditugun:*



Orduan,

(i) *Sinuaren teorema:*
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

(ii) *Kosinuaren teorema:*
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Ohartu, Pitagorasen teorema kosinuaren teoremaren kasu berezia besterik ez dela, A angelua zuzena denekoa hain zuzen ere.

5.2 Zenbaki konplexuak

Jakina da $x^2 + 1 = 0$ ekuazioak ez daukala erro errealik, izan ere, $x^2 + 1 > 0$ da $x \in \mathbb{R}$ edozein izanik. Ekuazio horrek soluzioa izan dezan, i ikurraren bidez adieraziko dugu $i^2 = -1$ erlazioa betetzen duen zenbakia. Behin zenbaki hori definituta, bere konbinazio direnak ere kontsidera ditzakegu, eta horrela osatzen da zenbaki konplexuen multzoa:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Zenbaki konplexu bat $z = a + bi$ modura idatzita daukagunean, bere *parte erreala*, $\mathrm{Re}(z) = a$ dela diogu, eta bere *parte irudikaria* $\mathrm{Im}(z) = b$.

Ohartu $a \in \mathbb{R}$ edozein zenbaki erreal $a = a + 0i$ idatz dezakegula zenbaki konplexu gisa. Beraz, bistakoa da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ daukagula.

Batzuetan interesatuko zaigu $z = a + bi$ zenbaki konplexua $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ puntuarekin identifikatzea, eta horregatik hitz egiten da batzuetan *plano konplexu*-az.

Eragiketak zenbaki konplexuekin

Zenbaki konplexuen multzoan, batuketa eta biderketa ere defini ditzakegu:

Definizioa 5.2.1. Baldin eta $z_1 = a + ib, z_2 = c + di \in \mathbb{C}$ edozein badira, $\mathbb{C}$ multzoan honela definitzen dira bi zenbakiren arteko batuketa eta biderketa:

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$,
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

Erraz ikus daiteke bi eragiketa hauekin $\mathbb{C}$ gorputza dela. Izan ere, $z = a + bi$ baldin badaukagu, $-z = -a - bi$ da bere baturarekiko alderantzizkoa eta $z \neq 0$ bada $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

Konjokazioa

Aurrerago ikusiko dugun bezala, zenbaki konplexuetan garrantzi handia hartzen duen kontzeptu bat konjokatuarena da.

Definizioa 5.2.2. Baldin eta $z = a + bi$ zenbaki konplexua bada, orduan, *z-ren konjokatua*, $\overline{z}$ bidez adieraziko duguna, $\overline{z} = a - bi$ zenbaki konplexua da.

Zenbaki konplexuak planoan adieraztea lagungarri dela aipatu dugu. Ohartu $z = a + bi$ planoan (a, b) gisa irudikatzen badugu, Pitagorasen teoremari esker badakigula jatorritik (a, b) punturaino dagoen distantzia $\sqrt{a^2 + b^2}$ dela. Honi ere izen bat emango diogu.

Definizioa 5.2.3. Izan bedi $z = a + bi$ zenbaki konplexua. Orduan, *z-ren modulua*, $|z|$ bidez adieraziko duguna, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ da.

Trigonometria eta zenbaki konplexuek lotura dutela ikusiko dugu aurrerago, baina ohartu z-ren modulua kalkulatzea, zenbaki konplexuak planoan adierazita ikusiz gero, ez dela Pitagorasen teorema aplikatzea besterik.

Modulua eta konjokazioaren artean ondoko berdintzak betetzen dira:

(i) $|z| = |\overline{z}|$,

(ii) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$,

(iii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

Era polarra

Baldin eta $z = a + bi$ bada, OX ardatza eta z, koordenatuen jatorriarekin lotzen duen zuzena artean dagoen θ angeluari, *z zenbaki konplexuaren argumentua* deitzen zaio, eta $\arg(a + bi)$ bidez adieraziko dugu.

Berriro ere, zenbakia planoko puntu gisa ikusiz gero, trigonometria erabil dezakegu zenbait erlazio lortzeko. Izan ere, $z = a + bi$ bada eta $\arg(a + bi) = \theta$ bada, orduan

$$\begin{aligned} a &= r\cos\theta, \\ b &= r\sin\theta, \\ \arg(a + bi) &= \arctan\frac{b}{a} \end{aligned}$$

dugu $r = |z|$ izanik. Beraz, z zenbaki konplexua ondoko eran ere idatz daiteke,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Ohartu argumentuaren $-\pi < \theta \leq \pi$ balio bakarra existitzen dela, eta honi $\arg(z)$ argumentu nagusia deitzen zaio. Gainera aurreko adierazpenari $z = a + bi$-ren *era polarra* deitzen zaio eta r_θ bidez denotatzen da, $r = |z|$, $a + bi$-ren modulua eta θ, $a + bi$-ren argumentua izanik

Adibidea 5.2.4. (i) $3i = 3_{\pi/2}$,

(ii) $1 + i = \sqrt{2}_{\pi/4}$,

(iii) $-1 - i = \sqrt{2}_{5\pi/4}$.

Ikus dezagun ondoren era polarrean adierazita dauzkagun zenbaki konplexuen biderkadura nolakoa den.

Teorema 5.2.5 (De Moivre). *Baldin eta* $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *eta* $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + isin\theta_2)$ *badira, orduan*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Froga.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + isin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)), \end{aligned}$$

non azken berdintzan sinuaren eta kosinuaren baturarako formulak aplikatu ditugun. □

Honek asko errazten du zenbaki konplexu baten berredura.

Korolarioa 5.2.6. *Baldin eta* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *bada, orduan* $n \in \mathbb{N}$ *izanik,*

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \textit{eta} \ z^{-n} = r^{-n}(\cos n\theta - i\sin n\theta).$$

Froga. Nahikoa da ohartzea,

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r} \end{aligned}$$

dela. □

Ohartu, modulua berretu egiten dela eta argumentua biderkatu. Geometrikoki, bi zenbaki konplexu biderkatzean, beraien moduluen biderkadura da biderkaduraren modulua, eta beraien argumentuen batura da biderkaduraren argumentua.

Adibidea 5.2.7. (i) $(2_{\pi/3})^3 = 8_\pi$,

(ii) $\frac{2_{\pi/3}}{\sqrt{3}_{\pi/4}} = (\frac{2}{\sqrt{3}})_{\pi/3-\pi/4}$.

Erroen bilaketa eta unitatearen erroak

Erraztasunagatik askotan notazio esponentzial konplexua erabiltzen da, hau da,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

adierazpena.

Notazio honekin, baldin eta $z = re^{i\theta}$ bada, $\overline{z} = re^{-i\theta}$ da. Gainera, $z_1 = r_1e^{i\theta_1} = r_2e^{i\theta_2} = z_2$ da baldin eta soilik baldin $r_1 = r_2$ eta $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ baldin bada $k \in \mathbb{Z}$ izanik.

Ohartu esponentzialaren idazkera bat datorrela oro har berreketak betetzen dituen propietateekin, izan ere,

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

dugu.

Adierazpen honek $z^n = 1$ ekuazioa ebazten laguntzen digu. Baldin eta z zenbaki konplexua $z^n = 1$ ekuazioaren erroa bada, z *unitatearen n-garren erroa dela esaten da.*

Proposizioa 5.2.8. *Baldin eta $n \in \mathbb{N}$ eta $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ badira, orduan unitatearen n-garren erroak $1, w^2, \ldots, w^{n-1}$ dira.*

Froga. Izan bedi $z = re^{i\theta}$ unitatearen n-garren erroetako bat. Orduan, $z^n = r^ne^{in\theta} = 1$ da, eta hemendik $r = 1$ eta $n\theta = 2k\pi$ direla ondorioztatzen da $k \in \mathbb{Z}$ izanik. Beraz, $\theta = 2k\pi/n$ eta $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = w^k$ dira. Ondorioz, unitatearen n-garren erroetariko bakoitza w-ren berredura bat da. Eta alderantziz, w-ren berredura bakoitza, unitatearen n-garren erro bat da, $(w^k)^n = w^{kn} = e^{i\frac{2\pi kn}{n}} = e^{i2\pi k} = 1$ delako. $\square$