

---

### 3. Gaiko ariketak

---

1. Erabaki ondoko multzoek kardinal bera duten ala ez. Baiezko kasuan eraiki beraien arteko bijekzio bat.

(i)  $A = \{a, b, c, d, e\}$  eta  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,

(ii)  $A = \mathbb{Z}$  eta  $B = 2\mathbb{Z}$ ,

(iii)  $A = \mathbb{N}$  eta  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10^6\}$ ,

(iv)  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 18\}$  eta  $B = \{2n \mid n = 1, \dots, 7\}$

2. Motxila batean zazpi margo urdin, lau gorri eta bederatzi berde dauzka. Zenbat margo atera behar ditugu ziurtatu ahal izateko:

(i) Bi margo gorri atera ditugula?

(ii) Kolore bereko bi margo atera ditugula?

(iii) Kolore ezberdineko bi margo atera ditugula?

(iv) Kolore bereko hiru margo atera ditugula?

(v) Kolore bakoitzeko bat atera dugula?

3. Bilera batean 87 lagun elkartu dira. Haietako batzuek elkar ezagutu dute. Frogatu gutxienez bi daudela pertsona kopuru bera ezagutu dutenak.

4. Zenbat bide ezberdin daude  $(0, 0)$  puntutik  $(4, 7)$  puntura baldin eta egin ditzakegun mugimendu bakarra gora (G) eta eskumara (E) pausu (oso) bat baldin badira?

5. Demagun 51 zenbaki aukeratzen ditugula  $\{1, \dots, 100\}$  multzotik. Frogatu:

(i) Gutxienez biren baturak 101 ematen duela.

(ii) Gutxienez bi elkarrekiko lehenak direla.

6. Izan bitez  $0, 1, \dots, 9$  zifrak.

(i) Zenbat modu ezberdinetan ordena daitezke?

(ii) Zenbatetan bakoiti guztiak elkarren ondoan badaude?

(iii) Zenbaki bakoiti bat ere ez badago beste bakoiti baten ondoan?

7. Demagun 2 lerro eta  $n$  zutabetako taula batean bi lauki aukeratu behar ditugula, bakoitza lerro batean egonik. Horretarako dagoen modu kopurua bi modu ezberdinetan kontatuz, ondorioztatu  $n^2 = \binom{n}{2}2 + n$  berdintza.

(Laguntza: Bereizi aukera kopurua aukeratutako bi laukiak zutabe berean edo desberdinetan egoteko kasu disjuntutan.)

8. 6 ikurreko zenbat zeinu egin daitezke Morse alfabetoan 2 marra eta 4 puntu erabiliz?

9. 20 pertsonako talde batetik, zenbat modu desberdinetan aukera daitezke 3 pertsonatako batzordeak? Eta zenbat modu desberdinetan, baldin eta bat presidentea, beste bat presidenteordea eta hirugarrena idazkaria izan behar badute?

10. Zenbat modu desberdinetan jar daitezke, bereizten ez diren 7 bola, zenbakituta dauden 7 kutxetan, kutxa bat bakarrik hutsik gelditzen baldin bada?

11. Demagun  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -n bost puntu dauzkagula. Frogatu horietako biren erdiko puntua berriz ere  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -ko puntua dela.

12. 20000 eta 70000 zenbakien artean, zenbat zenbaki desberdin daude digitu bat ere ez dutenak errepikaturik?

13. Zehaztu 3 hizkiko zenbat hitz desberdin egin daitezkeen  $a$ ,  $m$  eta  $e$  hizkiekin, hizki bakoitza behin bakarrik erabiltzen baldin bada. Eta zenbat, hizki bakoitza behin baino gehiagotan agertzeko aukera baldin badago?

14. Zenbat hitz osa daitezke ALELUYA hitzaren letrak berordenatuta? Zenbat hasten dira konsonante batekin?

15. Zenbat  $N$  zenbaki kapikua daude  $105 < N < 106$  baldintza betetzen dutenen artean?

16. Catalan-en zenbakiak (Eugène Charles Catalan matematikari ohiaren izena daramatenak) honakoak dira:  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Frogatu ondoko berdintza bai analitikoki bai argumentu konbinatorio bat emanaz:

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}.$$

17. Zenbat hitz ezberdin osa daitezke KONBINATORIA hitzaren letrekin baldin eta:

- (i) Ez badago baldintzarik?
- (ii) BAT letrak batera eta orden horretan agertu behar badira?
- (iii) Bi A-k ezin badira elkarren ondoan agertu?

18. Garatu ondoko adierazpena

$$\left(2x - \frac{x}{2}\right)^7.$$

19. Kepak ondoko produktuak ditu: gazta, txanpinoa, piperra, tipula, antxoa, salamia, pernila eta ganbak. Baldin eta pizza batek, horietariko produktu bat ere ez, produktu batzuk edo produktu desberdin guztiak izan baditzake, zenbat pizza mota desberdin egin ditzake Kepak?

20. Newtonen binomioaren formula erabiliz, garatu:

$$(x+2)^7, \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^6, \quad (2a^2 - 3)^6, \quad \left(\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2}\right)^5.$$

21. Aurkitu eskatzen diren koefizienteak:

(i)  $(3a - b)^8$  adierazpenaren garapenean  $b^3$ -ren koefizientea;

(ii)  $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^{10}$  adierazpenaren garapenean,  $a$  eta  $b$ -rekiko independentea den gaia;

(iii)  $(3x - 4y^2)^4$  adierazpenaren garapenean  $x^2y^4$ -ren koefizientea.

22. Frogatu berdintza hauek:

(i)  $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

(ii)  $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$

23. Newtonen binomioaren teorema eta  $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$  berdintza erabili hau frogatzeko:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2.$$