4. Gaia: Desberdintzak eta inekuazioak

4.1 Ordena zenbaki errealetan

Gai honetan zenbaki errealen multzoan definitutako ordena erlazioan zentratuko gara.

$\mathbb{R}$-ren ohiko ordena erlazioa kontsideratu eta hainbat desberdintza nola ebatzi ikusiko dugu kapitulu honetan.

Hasteko, oinarrizko notazioa zehaztuko dugu:

- $a \leq b$ idatziko dugu $a, b \in \mathbb{R}$ izanik *a b baino txikiago edo berdina da* adierazteko.
- $a < b$ idatziko dugu $a, b \in \mathbb{R}$ izanik *a b baino hertsiki txikiagoa da* adierazteko. Bestela esanda $a < b \iff a \leq b$ eta $a \neq b$.
- $a \geq b$ idatziko dugu $a, b \in \mathbb{R}$ izanik *a b baino handiago edo berdina da* adierazteko.
- $a > b$ idatziko dugu $a, b \in \mathbb{R}$ izanik *a b baino hertsiki handiagoa da* adierazteko. Bestela esanda $a > b \iff a \geq b$ eta $a \neq b$.

Bistakoa denez, $a \leq b \iff b \geq a$ baliokidetasuna dugu, eta antzera desberdintza hertsiarekin.

Desberdintzek ondoko propietateak betetzen dituzte.

Proposizioa 4.1.1. *Izan bitez $x, y, c \in \mathbb{R}$ eta $a > 0$, orduan:*

(i) $x \leq y \iff x + c \leq y + c$,

(ii) $x \leq y \iff ax \leq ay$,

(iii) $x \leq y \iff -ax \geq -ay$,

(iv) $x, y \geq 0$ *edo* $x, y \leq 0 \iff xy \geq 0$,

Froga. Ikus ditzagun pare bat eta besteak ariketa bezala utziko ditugu. (i) atala frogatzeko, ohartu

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff 0 \leq (y - x) \\ &\iff 0 \leq (y - x + c - c) \\ &\iff 0 \leq ((y + c) - (x + c)) \\ &\iff x + c \leq y + c. \end{aligned}$$

Ikus dezagun orain (iii)-a.

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff 0 \leq (y-x) \\ &\iff 0 \geq (y-x)(-a) \\ &\iff 0 \geq (-a)y - (-a)x \\ &\iff -ax \geq -ay. \end{aligned}$$

□

Oharra 4.1.2. Ohartu enuntziatuan $\leq$ idatzi dugula, baina erraz ikus daiteke emaitzak egia direla beste desberdintzentzako ere.

4.2 Inekuazio polinomikoak

Atal honetan inekuazio polinomikoak nola ebatzi ikusiko dugu. Hasteko defini dezagun polinomio bat zer den.

Definizioa 4.2.1. Baldin eta $\mathbb{R}$ gorputza badugu, $\mathbb{R}$-ren gaineko polinomio bat, $p(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ motako adierazpena da $a_i \in \mathbb{R}$ izanik. $\mathbb{R}$-ren gaineko polinomio guztien multzoa $\mathbb{R}[x]$ bidez adieraziko dugu. Hau da,

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Adibidea 4.2.2. $\mathbb{R}$-ren gaineko zenbait polinomio ondokoak dira:

$$x^2 + x + 1, \;\; \pi x^5 - \sqrt{7}x, \;\; \frac{4}{17}x^6 + 8x^2 + 1.$$

Definizioa 4.2.3. Baldin eta $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ badira, *inekuazio polinomiko* esaten diogu $p(x) \leq q(x)$ motako adierazpenari.

Inekuazioaren soluzioen multzoa esango diogu inekuazioa betetzen duten zenbaki errealen multzoari. Hau da $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \leq q(x)\}$-ri.

Oharra 4.2.4. Ohartu $p(x) \leq q(x)$ dela baldin eta soilik baldin $0 \leq q(x)-p(x)$ bada. Baina orain $q(x) - p(x) = h(x)$ beste polinomio erreal bat da. Beraz, nahikoa da $0 \leq h(x)$ moduko inekuazioak ebazten jakitea edozein inekuazio polinomiko ebazten jakiteko.

Aurrerago 8. gaian ikusiko dugun bezala, $\mathbb{R}$-n edozein polinomio gehienez bigarren mailakoen biderkadura gisa idatz daiteke.

Teorema 4.2.5. *Izan bedi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Orduan,*

$$p(x) = A(x-a_1)\ldots(x-a_k)(x^2+b_1x+c_1)\ldots(x^2+b_lx+c_l)$$

gisan deskonposa daiteke $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ izanik i guztietarako.

Baina orduan, $0 \leq p(x)$ ebazteko, biderkagai bakoitza noiz den positibo eta noiz negatibo jakitea nahikoa da biderkadura osoa positiboa edo negatiboa den erabakitzeko.

Adibidea 4.2.6. Demagun $4x^3 + 40x^2 + 96 \leq 4x^4 - 8x$ inekuazioa ebatzi behar dugula. Horren baliokidea da ondoko inekuazioa $0 \leq 4x^4 - 4x^3 - 40x^2 - 8x - 96$. Orain, ohartu 4-a faktore komun gisa atera dezakegula eta 4 eta -3 polinomioaren erroak direla. Beraz, ondoko inekuazioa geratzen zaigu:

$$0 \leq 4(x+3)(x-4)(x^2+2) = h(x).$$

Azken polinomioa ezin da gehiago faktorizatu, ez daukalako erro errealik. Azter dezagun x-ren balioen arabera noiz betetzen den desberdintza eta noiz ez. Hasteko, $x^2 \geq 0$ denez edozein zenbaki errealentzat, $x^2 + 2 > 0$ dugu. Beraz, azken faktorea beti da positiboa. Bestetik, hasierako konstantea 4 da, hori ere hertsiki positiboa beti. Beraz, inekuazioaren balioa aldatuko duten biderkagaiak $(x+3)$ eta $(x-4)$ izango dira. Noiz da hauetako bakoitza positibo?

Bada, $x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3$ dugu eta $x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4$. Ondorioz, -3 eta 4 balioetan aldatzen da biderkagai horien izaera.

Taula batean adieraziko bagenu:

	$x \leq -3$	$-3 < x \leq 4$	$4 \leq x$
4	$+$	$+$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
(x^2+2)	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$+$	$-$	$+$

Non azken lerroa aurrekoetatik ondorioztatzen dugun, faktore negatiboen kopuruaren arabera. Beraz, gure inekuazioaren soluzioa $x \leq -3$ edo $4 \leq x$ da, non muturrak onartzen ditugun desberdintzak $= 0$ kasua onartzen duelako. Bestela esanda, $(-\infty, -3] \cup [4, \infty)$ multzoa.

Polinomioak faktorizatzeko gai garela suposatuz, beti ebatzi ahalko dugu zenbaki errealetako inekuazio bat aurreko adibidearen prozedura jarraituz.

4.3 Frakzio arrazionaletako inekuazioak

Atal honetan, polinomioen zatidurak ageri diren inekuazioak nola ebatzi ikusiko dugu.

Definizioa 4.3.1. Izan bitez $p(x), q(x), r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]$ lau polinomio. Orduan

$$\frac{p(x)}{q(x)} \leq \frac{r(x)}{s(x)},$$

erako adierazpenari *frakzio arrazionaletako inekuazio* esaten diogu, eta inekuazioa betetzen duten zenbaki errealen multzoari *inekuazioaren soluzio*.

Oharra 4.3.2. Ohartu aurreko definizioko inekuazioa, polinomikoen kasuan bezala, sinpleago batera eraman dezakegula. Izan ere,

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} \le \frac{r(x)}{s(x)} &\iff 0 \le \frac{r(x)}{s(x)} - \frac{p(x)}{q(x)} \\ &\iff 0 \le \frac{r(x)q(x) - p(x)s(x)}{s(x)q(x)} \\ &\iff 0 \le \frac{h(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Garrantzitsua da ohartzea polinomioen zatidura kentzen pasa dugula desberdintzaren beste aldera inekuazioa ez aldatzeko. Izan ere, biderkatzen edo zatitzen ezin ditzakegu pasa, ez baitakigu beraien zeinua zein den; eta beraz, ez dakigu desberdintzaren zeinua aldatuko luketen ala ez.

Edozein kasutan, ikusi dugun bezala, hasierako inekuazioa edo azkena ebaztea baliokidea da. Beraz,

$$0 \le \frac{h(x)}{g(x)}$$

moduko inekuazioak nola ebatzi ikusiko dugu.

Aurreko ataleko argumentu bera erabiliz, badakigu $h(x)$ eta $g(x)$ ere gehienez bigarren mailako polinomioen biderkadura gisa idatzi ahalko ditugula. Orduan, nahikoa izango da biderkagaien zeinuei begiratu eta polinomikoekin jarraitzen genuen prozedura bera jarraitzea. Diferentzia bakarra, kasu honetan, izendatzailean ageri diren faktoreak noiz anulatzen diren adi egon beharko dugula da. Izan ere, zerorekin ezin dezakegu zatitu, eta beraz, izendatzailea zero egiten duten zenbakiak beti egongo dira soluzioen multzotik kanpo.

Adibidea 4.3.3. Demagun

$$0 \ge \frac{(x^2+3)(x-2)(x+1)}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{h(x)}{g(x)}$$

inekuazioa dugula. Aurreko atalean bezala, taula eraiki dezakegu:

	$x \le -2$	$-2 < x \le -1$	$-1 \le x \le 1$	$1 \le x \le 2$	$2 \le x$
(x^2+3)	+	+	+	+	+
$(x-2)$	−	−	−	−	+
$(x+1)$	−	−	+	+	+
$(x+2)^2$	+	+	+	+	+
$(x-1)$	−	−	−	+	+
$\frac{h(x)}{g(x)}$	−	−	+	−	+

Taularen arabera, emaitza $(\infty, -1] \cup [1, 2]$ tartea da. Baina ohar gaitezen izendatzailea 0 egiten duten balioak ez ditugula onartu behar. Beraz, $x = -2$ eta $x = 1$ balioak baztertu egin behar ditugu, eta ondokoa izango da soluzioen multzoa:

$$(\infty, -2) \cup (-2, -1] \cup (1, 2].$$

4.4 Inekuazioak balio absolutuarekin

Kapituluarekin amaitzeko, balio absolutuarekin ageri diren inekuazioak nola ebatzi aztertuko dugu. Defini dezagun ezer baino lehen balio absolutua.

Definizioa 4.4.1. *Balio absolutua*, $\mathbb{R}$-tik zenbaki erreal positiboetarako funtzio bat da, $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, honela definituta dagoena:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ bada}, \\ -x, & x < 0 \text{ bada}. \end{cases}$$

Ikus dezagun zein propietate betetzen diren inekuazio eta balio absolutuarekin.

Proposizioa 4.4.2. *Izan bedi $c \in \mathbb{R}$ non $c \geq 0$ den. Orduan:*

(i) $|x| \leq c$ *baldin eta soilik baldin* $-c \leq x \leq c$,

(ii) $|x| \geq c$ *baldin eta soilik baldin* $x \leq -c$ *edo* $x \geq c$.

Froga. Ikus dezagun (i) atala. Hasteko, demagun $x \geq 0$ dela. Orduan

$$|x| \leq c \iff 0 \leq x \leq c,$$

Orain $x < 0$ bada,

$$|x| \leq c \iff -x \leq c \iff 0 > x \geq -c.$$

Bi aukeren bildura izango da beraz soluzioa, hau da $[-c, c]$ tartea.

Orain (ii) ikusteko, $x \geq 0$ bada,

$$|x| \geq c \iff x \geq c$$

bada. Bestetik $x < 0$ bada

$$|x| \geq c \iff -x \geq c \iff x \leq -c.$$

Eta soluzioa $(-\infty, -c] \cup [c, \infty)$ izango da. □

Orain, inekuazio polinomiko eta arrazionalak balio absolutuekin nahas ditzakegu, eta bakoitza bere aldetik ebazten dakigunez, badakigu gisa honetako inekuazioak ebazten.

Adibidea 4.4.3. Demagun

$$\left| \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} \right| < 2$$

inekuazioa ebatzi behar dugula. Balio absolutuen propietateengatik badakigu hori egia dela baldin eta

$$-2 < \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} < 2$$

bada. Azter dezagun baldintza bakoitza bere aldetik.

$$\begin{aligned}
-2 < \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} &\iff 0 < \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} + 2 \\
&\iff 0 < \frac{(x+3)(x-1)+2x-4}{x-2} = \frac{x^2+4x-7}{x-2} \\
&\iff 0 < \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x-2}
\end{aligned}$$

non $\alpha = -2+\sqrt{11}$ eta $\beta = -2-\sqrt{11}$ diren. Honen soluzioa $(\beta,\alpha)\cup(2,\infty)$ da.

Bestalde,

$$\begin{aligned}
2 > \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} &\iff 0 > \frac{(x+3)(x-1)}{x-2} - 2 \\
&\iff 0 > \frac{(x+3)(x-1)-2x+4}{x-2} = \frac{x^2+1}{x-2}
\end{aligned}$$

Eta beraz, parte honen soluzioa $(-\infty, 2)$ da.

Bukatzeko, aldi berean bi baldintzak bete behar direnez, inekuazioaren soluzioa (β,α) tartea izango da.