

3.6. Ariketak

3.1. Erabaki ondorengo ordena-erlazioak ordena monomialak diren $\text{Mon}(X_1, \dots, X_n)$ multzoaren gainean. Baiezkoan, ikusi ea dagoeneko ezagutzen ditugun ordena monomialetako bat den.

- (i) $\mathbf{X}^\alpha > \mathbf{X}^\beta$ baldin eta soilik baldin $\alpha - \beta$ -ren lehenengo koordenatu ez-nulua, eskuinaldetik hasita, positiboa bada.
- (ii) $\mathbf{X}^\alpha > \mathbf{X}^\beta$ baldin eta soilik baldin $\alpha - \beta$ -ren lehenengo koordenatu ez-nulua, eskuinaldetik hasita, negatiboa bada.
- (iii) $\mathbf{X}^\alpha > \mathbf{X}^\beta$ baldin eta soilik baldin $\alpha - \beta$ -ren koordenatu guztiak ez-negatiboak badira, eta gutxienez horietariko bat positiboa bada. (Monomioekin pentsatuta, ohartu zatigarritasun-ordena dela.)
- (iv) Emanda γ bektore finkoa, koordenatu osoak eta ez-negatiboak dituen, $\mathbf{X}^\alpha > \mathbf{X}^\beta$ baldin eta soilik baldin $\gamma \cdot \alpha > \gamma \cdot \beta$ bada edo, bestela, $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ eta $\mathbf{X}^\alpha >_{\text{lex}} \mathbf{X}^\beta$ bada. (Hemen $\gamma \cdot \alpha$ -ren esanahia γ eta α bektoreen ohiko biderkadura eskalarra da.)

3.2. Frogatu ordena lexikografikoa, indeterminatuak $X_1 > X_2 > \dots > X_n$ ordenatuta, ondorengo propietatearen bidez karakteriza daitekeela: $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ polinomiak $\text{LT}(f) \in K[X_\ell, \dots, X_n]$ betetzen badu, $1 \leq \ell \leq n$ izanik, orduan $f \in K[X_\ell, \dots, X_n]$ dugu. (Beraz, alde batetik, lex ordenak propietate hori betetzen duela ikusi behar da, eta bestetik, ordena batek propietate hori betetzen badu, lex ordena dela.)

3.3. Frogatu ondorengo baieztapenak:

- (i) Edozein ordena monomialekin, $\text{LT}(f)$ konstantea bada, orduan f ere konstantea da.
- (ii) Edozein ordena monomialekin, $\mathbf{X}^\alpha \mid \mathbf{X}^\beta$ zatigarritasun-baldintza betetzen bada, orduan $\mathbf{X}^\alpha \leq \mathbf{X}^\beta$ dugu. Egia al da alderantzizkoa?
- (iii) Baldin eta \mathfrak{a} $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideala bada, orduan \mathfrak{a} ideal monomiala da baldin eta soilik baldin $\mathfrak{a} = (\text{LT}(\mathfrak{a}))$ bada.
- (iv) Ideal nagusi batean, Gröbnerren oinarri minimalak elementu bakar bateko sistema sortzaileak dira.

3.4. Izan bedi \mathfrak{a} $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideala.

- (i) Demagun lehenengo \mathfrak{a} ideal monomiala dela. Izan bedi G \mathfrak{a} -ren sistema sortzailea, monomioek osatua. Frogatu G \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarria dela $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren edozein ordena monomialekiko. Gainera, G Gröbnerren oinarri minimala da (izan ere, laburtua) baldin eta soilik baldin $\mathbf{X}^\alpha \nmid \mathbf{X}^\beta$ bada $\mathbf{X}^\alpha, \mathbf{X}^\beta \in G$ monomio desberdin guztietarako. Beraz, \mathfrak{a} -k Gröbnerren oinarri laburtu bera dauka ordena monomial guztietarako.
- (ii) Alderantziz, \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri laburtuak bat badatoz $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ordena monomial guztietarako, izan behar du \mathfrak{a} -k ideal monomiala? (Kontuan izan aurreko ariketaren (iv) atala.)

(iii) Izan bedi $d \in \mathbb{N}$ finkoa. Definitu

$\mathfrak{a} = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] \mid f \text{ osatzen duten monomio guztien maila osoa } \geq d \text{ da}\}.$

Frogatu \mathfrak{a} $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideal monomiala dela eta eman \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri laburtua.

3.5. Izan bitez \mathfrak{a} ideal monomiala eta $\{\mathbf{X}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{X}^{\alpha_r}\}$ \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri laburtua.

- (i) Erabil dezagun ondorengo notazioa: A matrizearen elementuak $K[X_1, \dots, X_n]$ -ko polinomioak badira, orduan polinomio bakoitza bere gai askearekin ordezkatzuz lortzen den matrizea \tilde{A} ikurraz adieraziko dugu. (Beraz, \tilde{A} -ren elementuak K gorputzean daude. Ohartu $A \mapsto \tilde{A}$ aplikazioa eratzun homomorfismoa dela.) Baldin eta $(\mathbf{X}^{\alpha_1} \dots \mathbf{X}^{\alpha_r})A = (\mathbf{X}^{\alpha_1} \dots \mathbf{X}^{\alpha_r})$ bada, frogatu $\tilde{A} = I_r$ dela.
- (ii) Demagun orain $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_s)$ dugula, f_i guztiak polinomioak izanik, ez derigorrean monomioak. Frogatu $s \geq r$ dela. (Iradokizuna: Badaude P eta Q matrizeak $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren gainean, $r \times s$ eta $s \times r$ tamainakoak, halakoak non $(\mathbf{X}^{\alpha_1} \dots \mathbf{X}^{\alpha_r})P = (f_1 \dots f_s)$ eta $(f_1 \dots f_s)Q = (\mathbf{X}^{\alpha_1} \dots \mathbf{X}^{\alpha_r})$ baita. Aplikatu orduan (i) atala.) Beraz, ideal monomial baten sortzaile kopuru minimoa monomioak diren sortzaileak aukeratuz lortzen da, eta kopuru hori bat dator Gröbnerren oinarri laburtuaren kardinalarekin.
- (iii) Aurreko ariketa erabiliz, ondorioztatu $r \in \mathbb{N}$ guztietarako existitzen direla r sortzaile behar dituzten idealak $K[X, Y]$ eratzunaren barruan. Horrek erakusten du ez dela posible Hilberten oinarriaren teoremaren bertsio kuantitatibo bat ematea, $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideal guztien sortzaile kopuru minimoa n -ren funtzioan bornatzen duena.
- (iv) Buchbergerren algoritmoa erabiliz, kalkulatu $\mathfrak{b} = (X^2 + Y, X^3)$ idealaren Gröbnerren oinarri laburtua ordena lexikografikoarekiko, $X > Y$ hartuta. Ondorioztatu ideal ez-monomialen kasuan ezin dela ziurtatu Gröbnerren oinarri laburtu baten kardinala idealaren sortzaile kopuru minimoarekin bat datorrenik.

3.6. Izan bitez $\mathfrak{a} = (\mathbf{X}^\alpha \mid \alpha \in A)$ eta $\mathfrak{b} = (\mathbf{X}^\beta \mid \beta \in B)$ $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideal monomialak. Frogatu $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ eta $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ere ideal monomialak direla, eta eman ideal horiek sortzen dituzten monomioak \mathfrak{a} -ren eta \mathfrak{b} -ren sortzaileak erabiliz. Noiz datoz bat $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ eta $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$?

3.7. Izan bedi \mathfrak{a} $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideala eta demagun $\{f_1, \dots, f_s\}$ \mathfrak{a} -ren sistema sortzailea dela, baina ez Gröbnerren oinarria (emandako ordena monomial batekiko). Frogatu badagoela $f \in \mathfrak{a}$ polinomio bat, hondar ez-nulua ematen duena f_1, \dots, f_s -rekin zatitzean, polinomio horiek edozein modutan zerrendatuta ere. (Laguntza: Erabili Gröbnerren oinarriaren definizioa.)

3.8. Izan bedi \mathfrak{a} $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideala.

- (i) Demagun $G \subseteq \mathfrak{a}$ multzoak ondorengo propietatea betetzen duela: $f \in \mathfrak{a}$ guztiek 0 hondarra ematen dute G -rekin zatitzean (G -ko polinomioak ordena finko batean zerrendatu eta gero). Frogatu G \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarria dela. (Egia esan, hori Buchbergerren irizpidearen ondorio zuzena da. Eman, hala ere, emaitza horren beste froga bat, Gröbnerren oinarriaren definizioan oinarrituta.)
- (ii) Izan bitez G eta G' \mathfrak{a} -ren Gröbnerren bi oinarri, ordena monomial bera erabilia. Frogatu $\overline{f}^G = \overline{f}^{G'}$ dela $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ guztietarako.

3.9. Izan bitez K gorputz aljebraikoki itxia eta $f_1, \dots, f_s \in K[X_1, \dots, X_n]$. Nullstellensatzaren bertsio ahula dela eta,

$$\begin{cases} f_1(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ f_s(X_1, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

ekuazio polinomikoetako sistemak ez du soluziorik baldin eta soilik baldin $1 \in (f_1, \dots, f_s)$ bada. Badakigu barnekotasun-problema hori (f_1, \dots, f_s) -ren G Gröbnerren oinarri bat kalkulatu ebatz daitekeela. Frogatu erantzuna oso simplea dela kasu horretan: $1 \in (f_1, \dots, f_s)$ dugu baldin eta soilik baldin $1 \in G$ bada. (Iradozikuna \Rightarrow inplikaziorako: Deskonposatu 1 G -rekiko zatiketaren algoritmoa erabiliz, eta kontuan izan zein den agertzen diren batugaien multimaila.) Ohartu, bestalde, $1 \in G$ izanez gero $G = \{1\}$ dugula. Irizpide hori erabiliz, erabaki ekuazio polinomikoetako ondorengo sistemek soluzioak dituzten edo ez, \mathbb{C} gorputzaren gainean:

$$(i) \begin{cases} X^2 + Y = 1 \\ Y^2 + Z = 0 \\ Z^2 + X = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} X^2 + Y = 1 \\ Y^2 + Z = 0 \\ Z^2 + X = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} X^2 + Y = 1 \\ Y^2 + Z = 1 \\ Z^2 + X = 1 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{cases}$$

3.10. Lehenengo gaiko 1.7 ariketan, $K[X, Y]/(f(X, Y))$ moduko zatidura-eraztun baten oinarri bat eta dimentsioa lortu ditugu. Problema honetan gure asmoa da emaitza hori $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren zatidura-eraztun guztietara hedatzea.

- (i) Izan bedi \mathfrak{a} $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideala. Frogatu $\text{Mon}(X_1, \dots, X_n) \setminus \text{LM}(\mathfrak{a})$ multzoko monomioen koklaseek $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ zatiduraren K -oinarri bat osatzen dutela. Ondorioztatu nola erabil daitekeen \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri bat $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ -ren K -oinarri bat lortzeko.
- (ii) Aurkitu ondorengo zatiduren K -oinarriak, eta eman beren dimentsioa, finitua izanez gero (ohartu ordena monomial desberdinak erabiliz K -oinarri desberdinak lor daitezkeela):
- $K[X, Y]/(X^2, Y^2)$.
 - $K[X, Y]/(X^2Y, XY^2)$.
 - $K[X, Y, Z]/(X^3 + Y^2, Y^3 + Z^2, Z^3 + X^2)$.
 - $K[X, Y, Z]/(X + YZ, Y + XZ, Z + XY)$.

- (iii) Indeterminatu bakar baten kasuan, $g \in K[X]$ edozein polinomio izanik, badakigu nola adierazi $\bar{g} \in K[X]/(f(X))$ koklasea $\{\bar{1}, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{n-1}\}$ K -oinarriaren elementuen konbinazio lineal gisa. Nahikoa da g f -z zatitzea eta zatiketaren r hondarra hartzea; orduan, $\bar{g} = \bar{r}$ dugu. Esan nola ebaz daitekeen problema hori $K[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$ zatidura orokor baten kasuan. Baldin eta $g(X, Y, Z) = X^3 + Y^3 + Z^3$ bada, aurreko ataleko (c) eta (d) kasuetan, deskonposatu \bar{g} elementua $K[X, Y, Z]/\mathfrak{a}$ zatiduran, lortutako K -oinarriarekiko.

3.11. $K[X, Y, Z]$ -ren ondorengo idealetarako, erabaki emandako sortzaileek Gröbnerren oinarri bat osatzen duten lex, grlex eta grevlex ordena monomialekiko, hurrenez hurren, betiere $X > Y > Z$ harturik.

- (i) $(X^2 + Z^2, Y + Z^2)$. (iv) $(Y + Z^2, XZ + Y^2)$.
(ii) $(X^2 + Z^2, X + YZ)$. (v) $(Y^3, XZ + Y^2)$.
(iii) $(X^2 + Z^2, XZ + Y^2)$. (vi) $(X^2 + Y^3, XZ + Y^2)$.

Kasu guztietan, aurkitu ideal horien Gröbnerren oinarri laburtu bana aipatutako ordena monomialekiko.

3.12. Ariketa honetan 3.5 problemaren (iv) ataleko emaitza orokortzen dugu. Izan bedi $\mathfrak{a} = (X^n + Y^n, X^m)$, $m > n > 1$ izanik. Frogatu \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri laburtuek hiruna elementu dutela $X > Y$ betetzen duten ordena monomial guztiekiko. Zer gertatzen da $m \leq n$ bada? Eta $Y > X$ hartuz gero?

3.13. Erabaki baieztapen hau egiazkoa den edo ez: “Izan bitez $f, f_1, \dots, f_s \in K[X_1, \dots, X_n]$, eta demagun f -ren gai guztiak $LT(f_i)$ -ren batez zatigarriak direla (aldez aurretik finkatutako ordena monomial batekiko). Zatiketaren algoritmoa jarraitzen badugu f polinomioa f_1, \dots, f_s -rekin zatitzeko, orduan zero hondarra lortzen da beti, f_1, \dots, f_s edozein modutan zerrendatuta ere.”

3.14. Problema honetan ikusten dugu batzuetan “bisualki” jakin daitekeela emandako sistema sortzaile bat ideal baten Gröbnerren oinarria den edo ez, inolako konturik egin gabe. Ondorengo ataletan, ordena monomial finko batekin lan egiten dugu.

- (i) Izan bedi $\mathfrak{a} = (f, g)$ $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideala eta demagun $LT(f)$ eta $LT(g)$ monomioak elkarrekiko lehenak direla. Frogatu $\{f, g\}$ \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarria dela. (Iradokizuna: Izan bedi $h \in \mathfrak{a}$, $h \neq 0$, eta demagun, absurdora eramanez, ez $LT(f)$ -k ezta $LT(g)$ -k ere ez dutela $LT(h)$ zatitzen. Idatzi $h = \alpha f + \beta g$, eta aukera dezagun α eta β polinomioak multideg $\alpha + \text{multideg } \beta$ minimoa den moduan. Ikusi $LT(\alpha)LT(f) + LT(\beta)LT(g) = 0$ dela, eta ondorioztatatu existitzen dela γ gai bat, non $LT(\alpha) = \gamma LT(g)$ eta $LT(\beta) = -\gamma LT(f)$ baita. Jarri $\tilde{\alpha} = \alpha - \gamma g$ eta $\tilde{\beta} = \beta + \gamma f$. Orduan $h = \tilde{\alpha} f + \tilde{\beta} g$ dugu, eta hori kontraesan bat da.)
- (ii) Orokorki, $\mathfrak{a} = (g_1, \dots, g_t)$ bada, $(LT(g_i), LT(g_j)) = 1$ izanik $i \neq j$ guztietarako, egokitu aurreko ataleko argudioa $\{g_1, \dots, g_t\}$ \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarria

dela frogatzeko. (Horrela argudiatuz, $h = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_r g_r + \alpha_{r+1} g_{r+1} + \dots + \alpha_t g_t \in \mathfrak{a}$ polinomio bat lortuko dugu, baldintza hauek betetzen dituen: $\text{LT}(h)$ ez da $\text{LT}(g_i)$ batez ere zatigarria, $\sum_{i=1}^t \text{multideg}(\alpha_i)$ minimoa da,

$$\text{LM}(\alpha_1 g_1) = \dots = \text{LM}(\alpha_r g_r) > \text{LM}(\alpha_{r+1} g_{r+1}), \dots, \text{LM}(\alpha_t g_t)$$

eta

$$\text{LT}(\alpha_1 g_1) + \dots + \text{LT}(\alpha_r g_r) = 0.$$

Ikusi $\prod_{j \neq i} \text{LT}(g_j) \mid \text{LT}(\alpha_i)$ dela, eta idatzi $\text{LT}(\alpha_i) = \gamma_i \prod_{j \neq i} \text{LT}(g_j)$. Jarri orduan $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - \gamma_i \prod_{j \neq i} g_j$.

- (iii) Erabili aurreko atala 3.11 ariketaren kasu batzuk ebazteko.
- (iv) Demagun ekuazio linealen sistema bat dugula,

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n - b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n - b_m = 0 \end{cases}$$

eta jarri $\mathfrak{a} = (a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n - b_1, \dots, a_{m1}X_1 + \dots + a_{mn}X_n - b_m)$. Orduan, Gaussen algoritmoa jarraituz lortzen den sistema baliokidearen polinomioek \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri bat osatzen dute edozein ordena monomialekiko, $X_1 > \dots > X_n$ hartzen den bitartean.

3.15. Izan bedi $\mathfrak{a} = (Y - X^2, XY)$ $K[X, Y]$ -ren ideala.

- (i) Frogatu \mathfrak{a} ez dela ideal erradikala. (Aurkitu behar dugu $f \notin \mathfrak{a}$ polinomio bat, halakoa non $f^r \in \mathfrak{a}$ den r berretzailereren baterako. Horretarako, kandidatu garbi bat dago. Orduan, ideal-barnekotasunaren problema baten aurrean gaude, eta hori \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri baten laguntzarekin erabaki daiteke. Eman froga alternatibo bat, Gröbnerren oinarrikerik erabili gabe.)
- (ii) Aurkitu $\text{rad } \mathfrak{a}$ ideala.
- (iii) Demagun orain K gorputza aljebraikoki itxia dela. Bigarren gaiko emaitzak erabiliz, zein beste modutan kalkula dezakegu $\text{rad } \mathfrak{a}$ ideala?

3.16. Izan bedi $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Idatz dezagun f X_1 indeterminatuarekiko,

$$f(X_1, \dots, X_n) = a_m(X_2, \dots, X_n)X_1^m + \dots + a_1(X_2, \dots, X_n)X_1 + a_0(X_2, \dots, X_n),$$

eta demagun $a_m(X_2, \dots, X_n) \in K^\times$ unitatea dela. Dakigunez, kasu horretan $g \in K[X_1, \dots, X_n]$ edozein polinomio f -rekin zatitu dezakegu, X_1 indeterminatuarekiko. Frogatu horrela lortzen diren zatidura eta hondarra bat datozela $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren zatiketaren algoritmo orokortua aplikatuz lortzen direnekin, ordena lexikografikoa aukeratzen badugu, $X_1 > \dots > X_n$ harturik.

3.17. Izan bedi \mathfrak{a} $K[X_1, \dots, X_n]$ -ren ideal homogeneousoa, eta finka dezagun ordena monomial bat. (Polinomio homogeneousoaren eta ideal homogeneousoaren kontzeptuak 4. gaiko 4.6 eta 4.9 definizioetan aurki daitezke, hurrenez hurren.)

- (i) Aukeratu dezagun $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ \mathfrak{a} -ren sistema sortzaile bat, polinomio homogeneous osatua. Orduan, F -ri Buchbergerren algoritmoa aplikatuz lortzen den Gröbnerren oinarriko polinomio guztiak homogeneousak dira. (Iradokizuna: Ikusi bi polinomio homogeneousen S -polinomioa homogeneouso dela, eta polinomio homogeneousoen arteko zatiketaren hondarra homogeneouso dela.)
- (ii) Ondorioztatu \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri laburtuan polinomio guztiak homogeneousoak direla.

Azken atalak \mathfrak{a} ideal bat homogeneouso den edo ez jakiteko irizpide bat ematen du: kalkulatu \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri laburtua ordena monomial batekiko, eta ikusi oinarri horretako polinomio guztiak homogeneousoak diren edo ez. Hurrengo adibideak erakusten duenez, irizpide horrek ez du balio Gröbnerren oinarri orokor bat aztertzen badugu (ez laburtua).

- (iii) Ikusi $\{X^2 + Y^2 - Y, Y\}$ multzoa $\mathfrak{a} = (X^2 + Y^2, Y)$ ideal homogeneousoaren Gröbnerren oinarria dela lex ordenarekiko, $X > Y$ harturik. (Are gehiago, Gröbnerren oinarri minimala da.)

3.18. Ariketa hau egiteko *Mathematica* programaren `GroebnerBasis` funtzioaz baliatuko gara Gröbnerren oinarriak kalkulatzeko. Izan bedi $\mathfrak{a} = (X^{n+1} + Y^{n+1} + Z^{n+1}, X^n + Y^n)$ $K[X, Y, Z]$ -ren ideala. Kalkulatu \mathfrak{a} -ren Gröbnerren oinarri laburtuak n -ren balio batzuetarako, lex, grlex eta grevlex ordena monomialekiko, $X > Y > Z$ harturik. Lortutako emaitzen arabera, egin konjetura bat oinarri laburtu horien kardinalari buruz n -ren balio orokor baterako. Konjetura horrek propietate hauek iradokitzen ditu:

- (i) Emandako ideal bat sortzeko bi polinomio nahikoak izan arren, gerta daiteke ordena monomial batekiko Gröbnerren oinarri laburtuaren polinomioen kopurua guk nahi bezain handia izatea. Bestela esanda: ezin da bornatu Gröbnerren oinarri laburtuaren kardinala idealaren sortzaile kopuru minimoaren funtzioan.
- (ii) Oso diferentzia handiak egon daitezke, Gröbnerren oinarri laburtuaren kardinalari dagokionez, ordena monomial desberdinekin. Beraz, ordena monomialaren aukera oso garrantzitsua izan daiteke. Askotan, grevlex ordenak lex-ek eta grlex-ek baino kardinal txikiagoak ematen ditu, adibide honetan ikusten den bezala. Hala ere, batzuetan kontrakoa gerta daiteke: ikusi 3.11 ariketaren emaitzak.