2.4. Ariketak

2.1. Frogatu $\mathbb{A}^3$-ren ondorengo azpimultzo parametrizatuak aljebraikoak direla:

(i) $S = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in K\}$.

(ii) $S = \{(t^2, t^3, t^4) \mid t \in K\}$. (Errazagoa da K aljebraikoki itxia bada, baina edozein gorputzen gainean egin daiteke.)

(iii) $S = \{(s^3, st^2, t^3) \mid s, t \in K\}$, K aljebraikoki itxia izanik.

2.2. Izan bedi $V \subseteq \mathbb{A}^n$ multzo aljebraikoa. Baldin eta $a \in \mathbb{A}^n$ bada, frogatu V-ri a bektoreko translazioa aplikatuz berriro ere multzo aljebraiko bat lortzen dela, hau da, $a + V = \{a + b \mid b \in V\}$ aljebraikoa dela.

2.3. Izan bitez $V \subseteq \mathbb{A}^n$ multzo aljebraikoa eta L zuzen afina. Frogatu bi posibilitate baino ez daudela: V-k L-ko puntu guztiak ditu edo, bestela, L-ko puntu kopuru finitu bat baino ez du. (Idatzi L-ren ekuazio parametrikoa eta ordezkatu V definitzen duten polinomioetan.) Horretan oinarrituz, frogatu ondorengo azpimultzoak ez direla aljebraikoak:

(i) Sinu eta kosinu funtzioen grafikoak, $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$-n.

(ii) $\cup_{\lambda \in \mathbb{N}} V(Y - \lambda X)$ bildura, $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$-n. (Beraz, multzo aljebraikoen bildura kontagarri batek ez du zertan multzo aljebraikoa izan.)

(iii) $\{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ helizea.

2.4. Izan bitez $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eta $W \subseteq \mathbb{A}^m$ azpimultzo aljebraikoak. Ikusi

$$V \times W = \{(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \mid (a_1, \dots, a_n) \in V, (b_1, \dots, b_m) \in W\}$$

$\mathbb{A}^{n+m}$-ren azpimultzo aljebraikoa dela. Orduan, $V \times W$-ri V-ren eta W-ren *biderkadura* esaten zaio.

2.5. Izan bitez K gorputz infinitua eta $f \in K[X_1, \dots, X_n]$.

(i) Baldin eta f $\mathbb{A}^n$-ko puntu guztien gainean anulatzen bada, frogatu $f = 0$ dela. (Argudiatu n-ren gaineko indukzioaz.) Beraz, $I(\mathbb{A}^n) = \{0\}$ dugu eta $\mathbb{A}^n$ barietatea da.

(ii) Aurreko atalean bezala argudiatuz, frogatu propietate orokorrago hau: f $\mathbb{A}^n$-ko puntu guztien gainean anulatzen bada, puntu kopuru finitu batean izan ezik, orduan ere $f = 0$ bete behar da. Ondorioz, $\mathbb{A}^n$-ri puntu kopuru finitu bat kentzen badiogu, gelditzen den multzoa ez da aljebraikoa.

(iii) Oro har, $V \neq \varnothing, \mathbb{A}^n$ multzo aljebraikoa bada, ikusi $\mathbb{A}^n \setminus V$ ez dela multzo aljebraikoa eta, are gehiago, diferentzia horren itxidura Zariskiren topologiarekiko $\mathbb{A}^n$ osoa dela. (Kontuan izan $\mathbb{A}^n$ barietatea dela, (i) atalaren arabera.) Ondorioztatu propietate hau: $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ polinomioa $\mathbb{A}^n \setminus V$-ko puntu guztietan anulatzen bada, orduan $f = 0$ dugu.

(iv) Frogatu $S = \{(s, st) \mid s, t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^2$ multzo parametrizatua ez dela aljebraikoa, 2.1 ariketaren adibideek kontrakoa pentsarazi badiezagukete ere. (Ohartu hori 2.3 ariketa erabiliz ere ikus daitekeela.)

2.6. Izan bedi K gorputz finitua, q elementukoa.

(i) Demagun $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ $\mathbb{A}^n$-ko puntu guztien gainean anulatzen dela eta f-ren maila q baino txikiagoa dela X_i indeterminatu guztiekiko. Frogatu $f = 0$ dela. (Argudiatu n-ren gaineko indukzioaz.)

(ii) Ondorioztatu $I(\mathbb{A}^n) = (X_1^q - X_1, \ldots, X_n^q - X_n)$ dela.

2.7. Izan bedi K gorputz finitua.

(i) Frogatu $\mathbb{A}^n$-ren azpimultzo guztiak aljebraikoak direla. Zein dira barietateak?

(ii) Aurreko ataletik ondorioztatzen da $V(X)$ zuzena ez dela barietatea $\mathbb{A}^2$-n K gorputzaren kasuan. Hala ere, (X) $K[X, Y]$-ren ideal lehena da. Zer azalpen dauka itxurazko kontraesan horrek?

2.8. Izan bedi $Y \subseteq \mathbb{A}^n$. Frogatu $I(\overline{Y}) = I(Y)$ betetzen dela. Bestela esanda, $\mathbb{A}^n$-ren azpimultzo baten gainean anulatzen diren polinomio guztiak multzo horren itxidura aljebraikoaren gainean ere anulatzen dira.

2.9. Izan bedi $S = \{(s, s, st) \mid s, t \in K\}$, K gorputza infinitua izanik.

(i) Frogatu $I(S) = (X - Y)$ dela. (Nabaria da $\supseteq$ partekotasuna. Alderantzizko partekotasuna ikusteko, hartu $f \in I(S)$ eta zatitu $X - Y$ polinomioaz, X indeterminatuarekiko. Orain, 2.5 ariketa kontuan hartuz, frogatu $r(Y, Z)$ hondarra zero dela.)

(ii) Ondorioztatu S ez dela multzo aljebraikoa. Zein da $\overline{S} \setminus S$ diferentzia?

2.10. Problema honetan, 2.1 ariketaren (iii) ataleko multzoa $\mathbb{Q}$ gorputzaren gainean aztertzen dugu:

$$S = \{(s^3, st^2, t^3) \mid s, t \in \mathbb{Q}\}.$$

(i) Frogatu $I(S) = (XZ^2 - Y^3)$ dela. (Laguntza: Hartu $f \in I(S)$. Aurreko ariketan bezala egin nahi badugu, problema bat daukagu $XZ^2 - Y^3$ polinomioaz zatitu nahi badugu X indeterminatuarekiko. Hala ere, $K = \mathbb{Q}(Y, Z)$ jartzen badugu, orduan $K[X]$-n badugu zatitzea eta, horregatik, existitzen dira $q(X, Y, Z)$, $r(Y, Z)$ eta $g(Y, Z)$ polinomioak $\mathbb{Q}$-ren gainean, halakoak non $g(Y, Z)f(X, Y, Z) = q(X, Y, Z)(XZ^2 - Y^3) + r(Y, Z)$ baita. Orain, beste problema bat daukagu $r(Y, Z) = 0$ dela frogatzeko. Horretarako, ikusi $\varphi : \mathbb{Q}[Y, Z] \longrightarrow \mathbb{Q}[Y, Z]$ homomorfismoa, non $Y \mapsto YZ^2$, $Z \mapsto Z^3$ baita, injektiboa dela.)

(ii) Ondorioztatu S ez dela aljebraikoa.

2.11. Izan bitez $f_1, \ldots, f_n \in K[T_1, \ldots, T_r]$ polinomioak eta definitu

$$S = \{(f_1(t_1, \ldots, t_r), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_r)) \mid t_1, \ldots, t_r \in K\} \subseteq \mathbb{A}^n$$

multzoa. Hori *multzo parametrizatua* dela esaten dugu ($t_1, \ldots, t_r$ parametroen menpekoak direlako bere puntuen koordenatuak). Aurretik ikusi dugun bezala, gerta daiteke multzo parametrizatu bat aljebraikoa izatea zein ez izatea. Baldin eta K

gorputza infinitua bada, frogatu $\overline{S}$ itxidura barietatea dela. (Laguntza: Definitu aljebra homomorfismo bat, $\varphi : K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[T_1, \dots, T_r]$, halakoa non $\ker \varphi = I(S)$ baita. Kontuan hartu 2.8 ariketa.)

Besterik ez bada esaten, hemendik aurrera gorputz guztiak aljebraikoki itxiak hartuko ditugu.

2.12. Izan bedi $S = \{(t^m, t^n) \mid t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^2$, $m, n \in \mathbb{N}$ izanik.

(i) Baldin eta $(m, n) = 1$ bada, frogatu $S = V(X^n - Y^m)$ multzo aljebraikoa dela. (Bézouten identitatearen arabera, existitzen dira $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, non $\alpha n + \beta m = 1$ baita.) Aurreko problema (edo lehenengo gaiko 1.15 ariketa) erabiliz, ondorioztatu S barietatea dela. Zein da $I(S)$ ideala?

(ii) Aurreko atalean oinarrituz, frogatu S multzo aljebraikoa eta barietatea dela m-ren eta n-ren balio guztietarako. Zein da $I(S)$ ideala oraingoan?

(iii) Eman $V(X^n - Y^m)$ multzo aljebraikoaren osagai irreduzibleak, eta ohartu horietariko bat S dela. (Lehenengo eta behin, $\operatorname{char} K = 0$ baldintzapean lan egin: horrek ziurtatzen du K-n edozein ordenatako unitatearen jatorrizko erroak existitzen direla. Aztertu gero $\operatorname{char} K = p > 0$ den kasua.)

2.13. Izan bedi $S = \{(t^3, t^4, t^7) \mid t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^3$, eta demagun $\operatorname{char} K \neq 3$ dela.

(i) Nabaria da $S \subsetneq V(Y^3 - X^4, Z^3 - X^7)$ partekotasuna. Erakutsi ez dela berdintza betetzen. Frogatu, hala ere, S multzo aljebraikoa dela, zehazkiago bi ekuazioren bitartez defini daitekeela. Beraz, 2.11 ariketa erabiliz, S barietatea da. Zein da $I(S)$ ideala?

(ii) Deskonposatu $V(Y^3 - X^4, Z^3 - X^7)$ multzo aljebraikoa osagai irreduzibleetan eta ikusi horietariko bat S dela.

(iii) Zer gertatzen da $\operatorname{char} K = 3$ bada?

2.14. Izan bedi $S = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^3$.

(i) Frogatu S multzo aljebraikoa dela. (Laguntza: Logikoa dirudi $Y^3 - X^4$ eta $Z^3 - X^5$ polinomioen zeroen multzoa dela frogatzea. Horrela saiatuz gero, arazoak agertzen dira. Kontuan hartu, halaber, $YZ - X^3$ polinomioa.) Beraz, 2.11 ariketaren arabera, S barietatea da.

(ii) Aurreko atalean, S hiru ekuazio polinomikoren bitartez defini daitekeela ikusi dugu. Ikusi polinomio horietatik ezin dela bat ere kendu S lortu nahi badugu.

(iii) Frogatu $S = V(X^4 - 2XYZ + Y^3, Z^2 - X^2Y)$ dela. Beraz, S bi ekuazioren bidez ere eman daiteke.

2.15. Izan bedi K gorputz infinitua. Frogatu $\mathbb{A}^n$-ren Zariskiren topologiak honako propietate hauek betetzen dituela:

(i) Bi edozein multzo ireki ez-hutsek ebakidura ez-hutsa dute. Beraz, $\mathbb{A}^n$ ez da Hausdorff espazioa, puntuak itxiak diren arren.

(ii) Multzo ireki ez-huts guztiak dentsoak dira $\mathbb{A}^n$-n.

(iii) Orain, K gorputza edozein izanda ere, frogatu $\mathbb{A}^n$ espazio trinkoa dela. (Demagun $\mathbb{A}^n = \cup_{i\in I} U_i$ dela, U_i guztiak irekiak izanik, eta estalki horrek ez duela azpiestalki finiturik. Orduan, $i_1, \dots, i_n \in I$ guztietarako, aurki dezakegu $i_{n+1} \in I$, non $\cup_{j=1}^{n} U_{i_j} \subsetneq \cup_{j=1}^{n+1} U_{i_j}$ baita. Horrela, $\mathbb{A}^n$-ren azpimultzo irekien kate hertsiki gorakor infinitu bat eraiki daiteke. Zergatik ez da hori posible?)

2.16. $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$-ren edo $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$-ren gainean bi topologia har ditzakegu: Zariskiren topologia eta ohiko topologia.

(i) Frogatu ohiko topologia Zariskirena baino finagoa dela, hau da, Zariskiren topologian itxia den edozein azpimultzo ohiko topologiarekin ere itxia dela. (Laguntza: Nahikoa da hori ikustea hipergainazal baten kasuan.)

(ii) Frogatu ohiko topologiaren bola itxiak ez direla itxiak Zariskiren topologiarekiko, 0 erradioko bolen salbuespenarekin. (Kontuan izan 2.3 ariketa.)

2.17. Erabaki, $\mathbb{A}^2$-ren ondorengo multzo aljebraikoetan, zein diren barietateak:

(i) $V(X^2 + Y^2 - r^2)$, r erradioko eta jatorrian zentratutako zirkunferentzia.

(ii) $V(X^2 + Y^2 - r^2)$ zirkunferentziaren eta ardatz koordenatuen ebakidura.

(iii) $V(Y^2 - X^2 - X^3)$ kubikoa.

(iv) $V(Y - X^2)$ eta $V(X - Y^2)$ parabolen ebakidura.

(v) $V(Y^2 - X^3, Y^4 - X^5)$.

Ba al da barietatea bi barietateren ebakidura?

2.18. $\mathbb{A}^3$-ren ondoko azpimultzo aljebraiko hauetatik, zein dira barietateak?

(i) Plano bat.

(ii) $V(X^2 + Y^2 + Z^2 - r^2)$ esfera.

(iii) $V(Z - X^2 - Y^2)$ paraboloidea.

(iv) $V(X^2+Y^2+Z^2-r^2)$ esferaren ebakidura plano koordenatu batekin, birekin edo hirurekin.

(v) $V(Z-X^2-Y^2)$ paraboloidearen eta $V(X^2+Y^2+Z^2-1)$ esferaren ebakidura.

(vi) $V(2Z-X^2-Y^2)$ paraboloidearen eta $V(X^2+Y^2+Z^2+1)$ esfera irudikariaren ebakidura.

2.19. Frogatu $f(X,Y) = X^2 + Y^2(Y-1)^2 \in \mathbb{R}[X,Y]$ polinomioa irreduziblea dela, baina $V(f)$ multzo aljebraikoa ez dela barietatea. Gerta daiteke hori gorputz aljebraikoki itxi baten gainean?

2.20. Eman $V(Y^4 - X^2, Y^4 - X^2Y^2 + XY^2 - X^3) \subseteq \mathbb{A}^2$ multzo aljebraikoaren osagai irreduzibleak.

2.21. Frogatu $V(X^2 - YZ, XZ - X) \subseteq \mathbb{A}^3$ multzoak hiru osagai irreduzible dituela, eta eman $K[X,Y,Z]$-n dagozkien ideal lehenak.

2.22. Eman $\mathbb{A}^3$-ren ondorengo azpimultzo aljebraikoen osagai irreduzibleak:

(i) $V(XYZ)$.
(ii) $V(XY, XZ, YZ)$.
(iii) $V(Z-1, X^2+Y^2-1)$.
(iv) $V(Y^2-XZ, Z^2-Y^3)$.
(v) $V(X^2+Y^2+Z^2, X^2-Y^2-Z^2+1)$.

2.23. Izan bedi $V = V(X^2-Y^2, 2X^2-Y^2-Z^4) \subseteq \mathbb{A}^3$ multzo aljebraikoa.

(i) Deskonposatu V osagai irreduzibleetan.
(ii) Nola deskonposatzen da $I(V)$ ideal erradikala ideal lehenen ebakidura gisa?

2.24. Izan bitez V multzo aljebraikoa eta $V_1, \dots, V_r$ bere osagai irreduzibleak. Frogatu $V_i \not\subseteq \cup_{j\neq i} V_j$ betetzen dela $i = 1, \dots, r$ guztietarako. Eman horren "itzulpena" $K[X_1, \dots, X_n]$-ren idealen testuingurura.