5

Multzo aljebraiko afinen eta proiektiboen arteko erlazioa

5.1. Homogeneizazioa eta deshomogeneizazioa

Izan bedi $0 \leq i \leq n$ finkoa. Aurreko gaian ikusi dugu

$$\begin{aligned} U_i &= \{(a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_n) \mid a_j \in K\} \\ &= \{(a_0 : \cdots : a_{i-1} : a_i : a_{i+1} : \cdots : a_n) \mid a_j \in K,\ a_i \neq 0\} \end{aligned}$$

multzoa $\mathbb{A}^n$-rekin bijekzioan dagoela eta $\mathbb{P}^n$-ren *zati afin* deitzen zaiola. Orduan, $\mathbb{P}^n = U_i \dot{\cup} H_i$ dugu,

$$H_i = \{(a_0 : \cdots : a_{i-1} : 0 : a_{i+1} : \cdots : a_n) \mid a_j \in K \text{ ez denak } 0\}$$

infinituko hiperplanoa izanik. Bere puntuei *infinituko puntu* deitzen zaie. Zati afina eta infinituko hiperplanoa i-ren aukeraren araberakoak dira. Normalean $i = 0$ hartuko dugu, baina dimentsio txikien kasuan, ohikoagoa da $i = n$ hartzea.

Orain, demagun $V \subseteq \mathbb{A}^n$ multzo aljebraikoa dela. Identifikatzen badugu $\mathbb{A}^n$ espazio afina U_0 zati afinarekin, orduan V U_0-ren barruan sartuta dagoela pentsa dezakegu. Horrela, $V \subseteq \mathbb{P}^n$ dugu. Baina, V $\mathbb{A}^n$-n aljebraikoa bada ere, ez du zertan aljebraikoa izan $\mathbb{P}^n$-n. Edozein kasutan, multzo aljebraiko proiektibo bat nahi badugu, $\overline{V}$ har dezakegu, V-ren itxidura $\mathbb{P}^n$-n Zariskiren topologiarekiko. Zein erlazio dago V eta $\overline{V}$-ren artean? Ezagutzen baditugu V-ren ekuazioak, zein dira $\overline{V}$-ren ekuazioak? Ohartu V-ren ekuazioek $X_1, \ldots, X_n$ indeterminatuak erabiltzen dituzten bitartean, $\overline{V}$-ren ekuazioetan X_0 indeterminatua ere ager daitekeela eta, gainera, ekuazio horiek homogeneoak izan behar dutela.

Gai honetan, galdera horiei erantzuna emango diegu eta, oro har, $\mathbb{A}^n$-ko multzo aljebraiko afinen eta $\mathbb{P}^n$-ko multzo aljebraiko proiektiboen arteko lotura aztertuko dugu. Horretarako, garapen sistematiko bat egingo dugu, hurrengo bi definizioetatik hasten dena.

5.1. Definizioa. Izan bedi $V \subseteq \mathbb{A}^n$ multzo aljebraiko afina. Ikus dezagun multzo hori $\mathbb{P}^n$ espazio proiektiboaren barruan sartuta, $\mathbb{A}^n$ U_0-rekin identifikatuz. Orduan, $V^* = \overline{V}$ definitzen dugu eta V^*-ri V-ren *itxidura proiektibo* deitzen diogu.

5.2. Definizioa. Izan bedi $V \subseteq \mathbb{P}^n$ multzo aljebraiko proiektiboa. Orduan, $V_* = V \cap U_0$ definitzen dugu, $\mathbb{A}^n$-ren azpimultzo gisa ikus dezakeguna, $\mathbb{A}^n$ U_0-rekin identifikatuz gero.

5.3. Oharra. Definizioa ikusita ez dago garbi V_* multzo aljebraiko afina den, baina laster ikusiko dugu hala dela. Lehenago, $K[X_1, \ldots, X_n]$-ko polinomioak $K[X_0, \ldots, X_n]$-ko polinomio homogeneoekin lotzeko modua emango dugu, homogeneizazioaren eta deshomogeneizazioaren bitartez.

Bestetik, azpimarratzekoa da U_0 eta $\mathbb{A}^n$ identifikatzeko erabiltzen dugun bijekzioa are gehiago homeomorfismoa dela, multzo horiek espazio topologiko modura ikusten baditugu Zariskiren topologiarekiko. (Zehazkiago, U_0-n azpiespazioaren topologia dugu, $\mathbb{P}^n$-n Zariskiren topologiatik eratorria.) Hori ere homogeneizazioaren eta deshomogeneizazioaren ondorioa izango da.

5.4. Definizioa. Izan bedi $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Orduan, f-ren *homogeneizazioa*, $f^* \in K[X_0, \ldots, X_n]$, honela definituriko polinomio homogeneoa da:

(i) $f = 0$ bada, orduan $f^* = 0$.

(ii) $f \neq 0$ bada, idatzi $f = f_0 + \cdots + f_\ell$ osagai homogeneotan deskonposaturik, $f_\ell \neq 0$ izanik. (Beraz, $\deg f = \ell$ dugu.) Orduan,

$$f^* = X_0^\ell f_0 + X_0^{\ell-1} f_1 + \cdots + X_0 f_{\ell-1} + f_\ell$$

definitzen dugu. Hau da, f^* lortzeko, X_0 indeterminatua erabiltzen dugu osagai homogeneo guztien maila ℓ-rekin berdintzeko.

Adibidez, $f(X, Y) = X^3 + XY + 1$ bada eta Z indeterminatu berria erabiltzen badugu homogeneizatzeko, orduan $f^*(X, Y, Z) = X^3 + XYZ + Z^3$ dugu.

5.5. Definizioa. Izan bedi $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$. (Eskuarki homogeneoa izango da, baina definizioa orokorki ematen dugu.) Orduan, f-ren *deshomogeneizazioa*, $f_* \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $X_0 = 1$ jarriz lortzen den polinomioa da:

$$f_*(X_1, \ldots, X_n) = f(1, X_1, \ldots, X_n).$$

Definizio horren arabera, $f(X, Y, Z) = X^3 + X^2Z + YZ^2$ bada, eta Z-rekiko deshomogeneizatzen badugu, orduan $f_*(X, Y) = X^3 + X^2 + Y$ dugu.

Azter ditzagun orain polinomioen homogeneizazioaren eta deshomogeneizazioaren oinarrizko propietateak. Has gaitezen homogeneizazioaren kasutik.

5.6. Teorema. *Izan bitez $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Orduan:*

(i) $f \neq 0$ *bada,*

$$f^* = X_0^{\deg f} f\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

(ii) $(fg)^* = f^* g^*$.

(iii) *Ez da oro har egia $(f+g)^* = f^* + g^*$ denik, baina karakteriza dezakegu noiz betetzen den berdintza hori. Zehazkiago:*

(a) *f, g edo $f+g$ polinomioetako bat* 0 *bada, orduan* $(f+g)^* = f^* + g^*$ *dugu.*

(b) *f, g eta $f+g$ hiru polinomioak* 0*ren desberdinak badira, orduan*

$$(f+g)^* = f^* + g^* \iff \deg f = \deg g = \deg(f+g). \tag{5.1}$$

FROGA. (i) Izan bedi $\deg f = \ell$. Deskonposatzen badugu f osagai homogeneotan, $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_\ell$, orduan definizioaren arabera $f^* = X_0^\ell f_0 + X_0^{\ell-1} f_1 + \cdots + f_\ell$ dugu. Orduan, 4.7 teorema erabiliz,

$$\begin{aligned}
&X_0^\ell f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) \\
&\quad = X_0^\ell \Bigg(f_0\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) + f_1\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) + \cdots + f_\ell\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big)\Bigg) \\
&\quad = X_0^\ell \Bigg(f_0(X_1, \dots, X_n) + \frac{1}{X_0} f_1(X_1, \dots, X_n) + \cdots + \frac{1}{X_0^\ell} f_\ell(X_1, \dots, X_n)\Bigg) \\
&\quad = X_0^\ell f_0(X_1, \dots, X_n) + X_0^{\ell-1} f_1(X_1, \dots, X_n) + \cdots + f_\ell(X_1, \dots, X_n) \\
&\quad = f^*(X_0, \dots, X_n)
\end{aligned}$$

dugu, nahi bezala.

(ii) Alde batetik, f eta g polinomioetako bat 0 bada, emaitza begi-bistakoa da. Demagun bada $f, g \neq 0$ dela. Orduan,

$$\begin{aligned}
(fg)^* &= X_0^{\deg(fg)} (fg)\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) \\
&= X_0^{\deg f} f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) \cdot X_0^{\deg g} g\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) \\
&= f^* g^*.
\end{aligned}$$

(iii) Adibidez, $f = X_1^2 + X_2$ eta $g = X_1^3 + X_2$ bada, orduan $f^* = X_1^2 + X_0 X_2$ eta $g^* = X_1^3 + X_0^2 X_2$ dugu. Beraz, kasu horretan $f^* + g^*$ ez da homogeneoa eta, ondorioz, $(f+g)^* \neq f^* + g^*$ dugu. Beste alde batetik, garbi dago $f = 0$, $g = 0$ edo $f + g = 0$ denean $(f+g)^* = f^* + g^*$ betetzen dela. Demagun orain f, g eta $f+g$ hiru polinomioak ez direla 0, eta frogatu dezagun (5.1) baliokidetasuna.

$\Rightarrow$) Demagun $(f+g)^* = f^* + g^*$ dela. Bereziki, $f^* + g^*$ batura homogeneoa da eta, horretarako, $f^* \neq 0$ eta $g^* \neq 0$ denez, beharrezkoa da f^*-ren eta g^*-ren mailak berdinak izatea. Ikusten badugu $f^* + g^* \neq 0$ dela, orduan $\deg(f^* + g^*) = \deg f^* = \deg g^*$ dugu, eta emaitza betetzen dela ondorioztatzen dugu, $\deg f^* = \deg f$, $\deg g^* = \deg g$ eta $\deg(f+g)^* = \deg(f+g)$ izateagatik. Beraz, $f^* + g^* = 0$ izateko posibilitatea baztertu behar dugu. Baina, hala balitz, $(f+g)^* = 0$ izango genuke, eta hori gertatzeko modu bakarra $f + g = 0$ izatea da, gure hipotesiaren kontra.

$\Leftarrow$) Orain, $\deg f = \deg g = \deg(f+g)$ bada,

$$\begin{aligned}
f^* + g^* &= X_0^{\deg f} f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) + X_0^{\deg g} g\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) \\
&= X_0^{\deg(f+g)} f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) + X_0^{\deg(f+g)} g\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) \\
&= X_0^{\deg(f+g)} (f+g)\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big) \\
&= (f+g)^*.
\end{aligned}$$

□

Jarraian ikusten dugunez, deshomogeneizazioaren kasua errazagoa da.

5.7. Teorema. *Izan bitez $f, g \in K[X_0, \dots, X_n]$. Orduan, $(f+g)_* = f_* + g_*$ eta $(fg)_* = f_* g_*$ dugu.*

Froga. Polinomioen aljebren propietate unibertsalagatik, defini dezakegu $\varphi : K[X_0, \dots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]$ aljebra homomorfismo bat $X_0 \mapsto 1$, $X_1 \mapsto X_1$, $\dots$, $X_{n-1} \mapsto X_{n-1}$ eta $X_n \mapsto X_n$ esleipenen bitartez. Orduan, $f \in K[X_0, \dots, X_n]$ polinomio orokor baten irudia f_* da. Aljebra homomorfismo batek baturak eta biderkadurak gordetzen dituenez, $(f+g)_* = f_* + g_*$ eta $(fg)_* = f_* g_*$ dugu. □

Erraz ikusten da aurreko frogan agertzen den φ homomorfismoaren nukleoa $(X_0 - 1)$ ideala dela. Ondorioz, f eta g bi polinomiok deshomogeneizatu bera badute, hau da, $f_* = g_*$ bada, orduan $f - g \in (X_0 - 1)$ dugu.

Ikus dezagun orain zer gertatzen den homogeneizazioa eta deshomogeneizazioa konposatzen baditugu.

5.8. Teorema. (i) *$f \in K[X_1, \dots, X_n]$ bada, orduan $(f^*)_* = f$ dugu.*

(ii) *$f \in K[X_0, \dots, X_n]$ bada, ez da oro har $(f_*)^* = f$ berdintza betetzen. Hala ere, f homogeneoa bada eta X_0^m bada f zatitzen duen X_0-ren berreturarik handiena, orduan $f = X_0^m (f_*)^*$ dugu.*

Froga. (i) Jakina, $f \neq 0$ har dezakegu. Orain, $(f^*)_*$ polinomioa lortzeko, $X_0 = 1$ jarri behar dugu f^*-ren adierazpenean. Kontuan izanik

$$f^* = X_0^{\deg f} f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big)$$

dela, nabaria da $(f^*)_* = f$ dugula.

(ii) Adibidez, $f = X_0^3 + X_0^2 X_1$ hartzen badugu, orduan $(f_*)^* = X_0 + X_1 \neq f$ dugu. Demagun orain f homogeneoa dela eta X_0^m dela f zatitzen duen X_0-ren berreturarik handiena. Orduan, f osatzen duten monomio guztietan X_0^m agertzen denez, $X_0 = 1$ jartzean monomioen mailari gutxienez m kenduko diogu. Bestetik, monomioren batean X_0^m faktorea baino ez dugu, eta ez X_0^{m+1}. Orduan, monomio horren mailari m kentzen diogu zehatz-mehatz. Beraz, $\deg f_* = \deg f - m$ erlazioa dugu.

Orain,

$$\begin{aligned}(f_*)^* &= X_0^{\deg f_*} f_*\Big(\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_n}{X_0}\Big)\\ &= X_0^{\deg f - m} f\Big(1,\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_n}{X_0}\Big) = X_0^{-m} f(X_0,X_1,\dots,X_n)\end{aligned}$$

dugu, azken berdintzan 4.7 teorema erabiliz, f homogeneoa dela kontuan izanik. Hemendik $f = X_0^m (f_*)^*$ lortzen dugu, nahi bezala. □

Ondorengo bi teoremetan, esplizituki jartzen dugu zein erlazio dagoen zeroen artean homogeneizatzen edo deshomogeneizatzen dugunean. Bi emaitzak begibistakoak dira f^*-ren eta f_*-ren definizioak erabiliz.

5.9. Teorema. *Izan bedi $f \in K[X_1,\dots,X_n]$. Orduan:*

$$(a_1,\dots,a_n)\ f\text{-ren zero afina} \iff (1:a_1:\dots:a_n)\ f^*\text{-ren zero proiektiboa.}$$

5.10. Teorema. *Izan bedi $f \in K[X_0,\dots,X_n]$ polinomio homogeneoa. Orduan:*

$$(1:a_1:\dots:a_n)\ f\text{-ren zero proiektiboa} \iff (a_1,\dots,a_n)\ f_*\text{-ren zero afina.}$$

Aurreko bi teoremetan oinarrituz, gaiaren hasieran aurreratu ditugun emaitza pare bat frogatu ditzakegu.

5.11. Proposizioa. *Izan bedi $V = V_+(f_i \mid i \in I)$ multzo aljebraiko proiektiboa, f_i guztiak polinomio homogeneoak izanik. Orduan, $V_* = V((f_i)_* \mid i \in I)$ dugu. Bereziki, V_* multzo aljebraiko afina da, eta V_*-ren ekuazioak V-ren ekuazio homogeneoak deshomogeneizatuz lortzen dira.*

FROGA. Izan bedi $(1:a_1:\dots:a_n) \in U_0$. Puntu proiektibo hori $(a_1,\dots,a_n)$-rekin lotuta dago U_0-ren eta $\mathbb{A}^n$-ren arteko identifikazioaren bitartez. Orduan,

$$\begin{aligned}(a_1,\dots,a_n) \in V_* &\iff (1:a_1:\dots:a_n) \in V\\ &\iff f_i(1:a_1:\dots:a_n) = 0,\ i \in I \text{ guztietarako} \quad {\scriptstyle (V = V_+(f_i\,\mid\, i\in I)\text{ delako})}\\ &\iff (f_i)_*(a_1,\dots,a_n) = 0,\ i \in I \text{ guztietarako}\\ &\iff (a_1,\dots,a_n) \in V((f_i)_* \mid i \in I)\end{aligned}$$

baliokidetasun-katea dugu eta, beraz,

$$V_* = V((f_i)_* \mid i \in I).$$

□

5.12. Adibidea. Izan bedi $V = V_+(X^2+Y^2-Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2$. Orduan, Z-rekiko deshomogeneizatzen badugu, $V_* = V(X^2+Y^2-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ zirkunferentzia bat da. Bestalde, X-rekiko deshomogeneizatzen badugu, orduan $V_* = V(Y^2-Z^2+1)$ hiperbola bat da. Horrek erakusten du multzo proiektibo bat beraren zati afinak desberdinak izan daitezkeela, $\mathbb{P}^n$-ren barruan aukeratzen dugun $\mathbb{A}^n$-ren kopiaren arabera.

5.13. Proposizioa. *U_0-ren eta $\mathbb{A}^n$-ren arteko identifikazioa homeomorfismoa da.*

FROGA. Badakigunez, identifikazioa $\varphi : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (1 : a_1 : \cdots : a_n)$ erregelaren bidez emanda dago. Orain, φ homeomorfismoa dela frogatzeko, $\mathbb{A}^n$-ren azpimultzo itxi baten irudia eta U_0-ren azpimultzo itxi baten alderantzizko irudia itxiak direla ikusi behar dugu. Gainera, azpimultzo itxi guztiak begiratu beharrean, bi kasuetan nahikoa da azpimultzo itxien oinarri banarekin egiaztatzea. Orain, 2.14 proposizioa erabiliz, badakigu $\{V(f) \mid f \in K[X_1, \dots, X_n]\}$ hipergainazalek $\mathbb{A}^n$-ren multzo itxien oinarri bat osatzen dutela eta, antzera, $\{U_0 \cap V_+(f) \mid f \in K[X_0, \dots, X_n] \text{ homogeneoa}\}$ U_0-ren multzo itxien oinarria da. Azter dezagun, bada, zer gertatzen den multzo itxi horien irudi zuzenekin eta alderantzizko irudiekin, hurrenez hurren.

Izan bedi $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Orduan, 5.9 teorema kontuan hartuz,

$$\begin{aligned}\varphi(V(f)) &= \varphi\big(\{(a_1, \dots, a_n) \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0\}\big)\\ &= \{(1 : a_1 : \cdots : a_n) \mid f^*(1 : a_1 : \cdots : a_n) = 0\} = U_0 \cap V_+(f^*)\end{aligned}$$

dugu eta, ondorioz, $\varphi(V(f))$ multzo itxia da U_0-n.

Bestetik, $f \in K[X_0, \dots, X_n]$ polinomio homogeneoa bada, orduan 5.10 teoremaren arabera,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(U_0 \cap V_+(f)) &= \varphi^{-1}\big(\{(1 : a_1 : \cdots : a_n) \mid f(1 : a_1 : \cdots : a_n) = 0\}\big)\\ &= \{(a_1, \dots, a_n) \mid f_*(a_1, \dots, a_n) = 0\} = V(f_*).\end{aligned}$$

Beraz, $\varphi^{-1}(U_0 \cap V_+(f))$ $\mathbb{A}^n$-ren azpimultzo itxia da, nahi bezala. □

Jarraian, (des)homogeneizazioa polinomioetatik idealetara hedatzen dugu.

5.14. Definizioa. Izan bedi $\mathfrak{a}$ $K[X_1, \dots, X_n]$-ren ideala. Orduan, $\mathfrak{a}$-ren *homogeneizazioa* honako ideal homogeneo hau da:

$$\mathfrak{a}^* = (f^* \mid f \in \mathfrak{a}).$$

5.15. Definizioa. Izan bedi $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \dots, X_n]$-ren ideala. Orduan, $\mathfrak{a}$-ren *deshomogeneizazioa* honako ideal hau da:

$$\mathfrak{a}_* = \{f_* \mid f \in \mathfrak{a}\}.$$

Ohartu $\mathfrak{a}_*$ ideala dela $f_* + g_* = (f + g)_*$ eta $f_* g_* = (fg)_*$ izateagatik, eta $f \mapsto f_*$ aplikazioa supraiektiboa izateagatik. Gara ditzagun orain idealen homogeneizazioaren eta deshomogeneizazioaren propietateak.

5.16. Teorema. *Izan bedi $\mathfrak{a}$ $K[X_1, \dots, X_n]$-ren ideala. Orduan:*

(i) *$\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ bada, ezin da ziurtatu $\mathfrak{a}^* = (f_1^*, \dots, f_r^*)$ denik. Hala ere, $\mathfrak{a} = (f)$ ideal nagusia bada, orduan $\mathfrak{a}^* = (f^*)$ dugu.*

(ii) *$(\mathfrak{a}^*)_* = \mathfrak{a}$ dugu.*

FROGA. (i) Ikus dezagun, $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ denean, ez duela zertan $\mathfrak{a}^* = (f_1^*, \dots, f_r^*)$ izan. Horretarako, jarri $f = Y - X^2$, $g = Z - X^2$, eta hartu $\mathfrak{a} = (f, g) \subseteq K[X, Y, Z]$. Homogeneizazioa T indeterminatu berriarekiko egingo dugu. Orduan, $f^* = YT - X^2$ eta $g^* = ZT - X^2$ dugu. Orain, $Y - Z \in \mathfrak{a}^*$ dela, baina $Y - Z \notin (f^*, g^*)$ dela ikusiko dugu. Alde batetik, $Y - Z = f - g$ kendura $\mathfrak{a}$-n dago eta, polinomio hori homogeneoa denez, $Y - Z \in \mathfrak{a}^*$ dugu. Bestetik, $Y - Z \in (f^*, g^*)$ balitz, orduan existituko lirateke $\alpha, \beta \in K[X, Y, Z, T]$ non

$$Y - Z = \alpha\,(YT - X^2) + \beta\,(ZT - X^2)$$

baita. Berdintza honetan $X = 0$ ordezkatzen badugu, orduan

$$Y - Z = \alpha\,YT + \beta\,ZT = (\alpha\,Y + \beta\,Z)T$$

dugu eta T-k $Y - Z$ zatituko luke $K[X, Y, Z, T]$-n. Hori faltsua da, argi eta garbi.

Demagun orain $\mathfrak{a} = (f)$ ideal nagusia dela, eta frogatu dezagun $\mathfrak{a}^* = (f^*)$ dela. Bakarrik arduratu behar dugu $\subseteq$ partekotasuna frogatzeaz. Orain,

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^* &= (g^* \mid g \in \mathfrak{a}) = ((qf)^* \mid q \in K[X_1, \dots, X_n]) \\ &= (q^* f^* \mid q \in K[X_1, \dots, X_n]) \subseteq (f^*) \end{aligned}$$

dugu, nahi bezala.

(ii) $\supseteq$) Izan bedi $f \in \mathfrak{a}$ edozein. Badaukagunez $(f^*)_* = f$ dela, $f \in (\mathfrak{a}^*)_*$ ondorioztatzen dugu.

$\subseteq$) Izan bedi $h \in (\mathfrak{a}^*)_*$. Ideal deshomogeneizatuaren definizioagatik, badago $g \in \mathfrak{a}^*$ non $h = g_*$ baita. Orain, homogeneizatuaren definizioa erabiliz, existitzen dira $q_1, \dots, q_r \in K[X_0, \dots, X_n]$ eta $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{a}$ non $g = q_1(f_1)^* + \cdots + q_r(f_r)^*$ baita. Orduan,

$$h = g_* = (q_1)_*((f_1)^*)_* + \cdots + (q_r)_*((f_r)^*)_* = (q_1)_* f_1 + \cdots + (q_r)_* f_r \in \mathfrak{a}.$$

$\square$

Nola lor dezakegu $\mathfrak{a}^*$ ideala, $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ sortzaileen bidez emanda badago? Aurreko teoremaren arabera, sortzaile bakar baten kasuan baino ezin dugu ziurtatu $\mathfrak{a}^* = (f_1^*, \dots, f_r^*)$ denik. Problema hori ebazteko, Gröbnerren oinarriak erabiliko ditugu.

5.17. Definizioa. Izan bedi $>$ ordena monomiala. Orduan, $>$ ordenak *maila gordetzen duela* esango dugu propietate hau betetzen badu: $\deg \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}} > \deg \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}}$ bada, orduan $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}} > \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}}$ dugu.

Adibidez, grlex eta grevlex ordenek maila gordetzen dute; lex-ek, berriz, ez.

Orain, $>$ ordena monomiala bada $\mathrm{Mon}(X_1, \dots, X_n)$-ren gainean, horretan oinarrituz $>^*$ ordena bat defini dezakegu $\mathrm{Mon}(X_0, \dots, X_n)$-ren gainean honako modu honetan:

$$X_0^r \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}} >^* X_0^s \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}} \iff \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}} > \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}} \text{ edo } \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}} \text{ eta } r > s.$$

Erraz egiaztatzen da $>^*$ ere ordena monomiala dela.

5.18. Lema. *Izan bedi $>$ ordena monomiala* $\mathrm{Mon}(X_1,\dots,X_n)$*-ren gainean, eta demagun $>$ ordenak maila gordetzen duela. Orduan,* $\mathrm{LM}_{>^*}(f^*) = \mathrm{LM}_>(f)$ *dugu,* $f \in K[X_1,\dots,X_n]$ *guztietarako.*

FROGA. Jarri $k = \deg f$ eta $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathrm{LM}_>(f)$. Orduan, $>$ ordenak maila gordetzeagatik, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$ monomioa f_k osagai homogeneoan agertzen da. Hori dela eta, f^* homogeneizatua egiten dugunean, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$ aldatu gabe gelditzen da. Hau da, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$ f^*-ren monomioetako bat da.

Orain, f^*-ren beste monomioak $X_0^s\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}}$ modukoak dira, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}}$ f-ren monomio bat izanik, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$-ren desberdina. Orduan, f-ren monomio nagusia $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$ denez, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}} > \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}}$ dugu eta, $>^*$ ordenaren definizioaren arabera, $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}} >^* X_0^s\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\beta}}$ ondorioztatzen dugu. Horrek $\mathrm{LM}_{>^*}(f^*) = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{\alpha}}$ dela frogatzen du. □

5.19. Teorema. *Izan bitez $\mathfrak{a}$ $K[X_1,\dots,X_n]$-ren ideala eta $G = \{g_1,\dots,g_t\}$ $\mathfrak{a}$-ren Gröbnerren oinarria, maila gordetzen duen $>$ ordena monomial batekiko. Orduan,* $\mathfrak{a}^* = (g_1^*,\dots,g_t^*)$ *dugu.*

FROGA. Are gehiago, $\{g_1^*,\dots,g_t^*\}$ $\mathfrak{a}^*$-ren Gröbnerren oinarria dela frogatuko dugu, $>^*$ ordenarekiko. Horretarako, $f \in \mathfrak{a}^*$ hartzen dugu, eta ikusiko dugu badagoela $g \in G$, halakoa non $\mathrm{LT}_{>^*}(g^*) \mid \mathrm{LT}_{>^*}(f)$ baita. Orokortasuna galdu gabe, f homogeneo har dezakegu. Izan ere, f_ℓ badin bada maila handieneko f-ren osagai homogeneoa, orduan

$$\mathrm{LT}_{>^*}(f) = \mathrm{LT}_>(f) = \mathrm{LT}_>(f_\ell) = \mathrm{LT}_{>^*}(f_\ell)$$

dugu, aurreko lema erabiliz eta $>$ ordena monomialak maila gordetzen duela kontuan hartuz.

Alde batetik, $f_* \in (\mathfrak{a}^*)_* = \mathfrak{a}$ dugu eta, bestetik, $f = X_0^m(f_*)^*$ dugu m berretzaileren baterako. Orduan, berriro ere aurreko lema erabiliz,

$$\mathrm{LT}_{>^*}(f) = X_0^m\mathrm{LT}_{>^*}((f_*)^*) = X_0^m\mathrm{LT}_>(f_*)$$

betetzen dela ikusten dugu. Orain, G $\mathfrak{a}$-ren Gröbnerren oinarria izateagatik, existitzen da $g \in G$ non $\mathrm{LT}_>(g) \mid \mathrm{LT}_>(f_*)$ baita. Bereziki, $\mathrm{LT}_>(g)$-k $\mathrm{LT}_{>^*}(f)$ zatitzen du. Orain, $\mathrm{LT}_{>^*}(g^*) = \mathrm{LT}(g)$ denez, teorema frogaturik gelditzen da. □

5.20. Adibidea. Izan bedi $\mathfrak{a} = (Y - X^2, Z - X^2)$, eta aukera dezagun grlex ordena monomiala, $X > Y > Z$ izanik. Erraz ikusten da, S-irizpidea erabiliz, emandako sistema sortzailea ez dela Gröbnerren oinarria ordena horrekiko. Beraz, ezin dugu $\mathfrak{a}^*$ ideal homogeneizatua lortu sortzaile horiek besterik gabe homogeneizatuz. Buchbergerren algoritmoa aplikatuz, $\{Y - X^2, Z - X^2, Z - Y\}$ $\mathfrak{a}$-ren Gröbnerren oinarria ateratzen dugu eta, azken teoremaren arabera,

$$\mathfrak{a}^* = (YT - X^2, ZT - X^2, Z - Y)$$

dugu. (Ohartu T indeterminatu berria erabili dugula homogeneizatzeko.)

Izan bedi $\mathfrak{a}$ $K[X_1,\dots,X_n]$-ren ideala. Orduan, f^* motako polinomioak $\mathfrak{a}^*$-ren sortzaileak dira eta, normalean, $\mathfrak{a}^*$-k askoz polinomio gehiago izango ditu. Hala ere, $h \in \mathfrak{a}^*$ polinomioa homogeneizatu bat bada, orduan $\mathfrak{a}$-ko polinomio baten homogeneizatua izan behar du. Bestela esanda, $g^* \in \mathfrak{a}^*$ bada, orduan $g \in \mathfrak{a}$ ondorioztatzen da. Hori zuzenean lor daiteke, 5.8 eta 5.16 teoremak aplikatuz: $g^* \in \mathfrak{a}^*$ bada, orduan deshomogeneizatuz, $g = (g^*)_* \in (\mathfrak{a}^*)_* = \mathfrak{a}$ dugu. Beraz, $\mathfrak{a}^*$ idealean, $\{f^* \mid f \in \mathfrak{a}\}$ sortzaileez aparte, ez dago beste polinomio homogeneizaturik.

Hala ere, $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \dots, X_n]$-ren ideala bada, ez da egia $g_* \in \mathfrak{a}_*$ baldintzatik $g \in \mathfrak{a}$ ondorioztatzen denik. Esan daitekeen guztia da existituko dela $f \in \mathfrak{a}$ halakoa non $g_* = f_*$ baita. Orduan, $(g - f)_* = 0$ da eta, hortaz, $g - f \in (X_0 - 1)$ dugu, baina $g \neq f$ eta $g \notin \mathfrak{a}$ gerta daiteke. Adibidez, $\mathfrak{a} = (X_0 + X_1)$ eta $g = 1 + X_1$ bada, orduan $g_* = g \in \mathfrak{a}_*$ dugu, baina $g \notin \mathfrak{a}$.

5.21. Teorema. *Izan bedi $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \dots, X_n]$-ren ideala. Orduan:*

(i) $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ *bada,* $\mathfrak{a}_* = ((f_1)_*, \dots, (f_r)_*)$ *dugu.*

(ii) *Demagun $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa dela. Orduan, $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}_*)^*$ partekotasuna dugu, baina, oro har, ezin da ziurtatu berdintza beteko denik.*

FROGA. (i) Erraz eman dezakegu $\subseteq$ partekotasunaren froga zuzen bat, eta alderantzizko partekotasuna tribiala da. Hala ere, 5.7 teoremaren frogan aipaturiko $\varphi : K[X_0, \dots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]$ homomorfismoa erabiliz ere lor dezakegu berdintza. Gogoratu φ-ren bitartez X_0-ren irudia 1 dela eta gainontzeko indeterminatuak finko gelditzen direla. Bereziki, f-ren irudia f_* da, eta φ supraiektiboa da. Orduan, $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ bada,

$$\mathfrak{a}_* = \varphi(\mathfrak{a}) = (\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_r)) = ((f_1)_*, \dots, (f_r)_*),$$

nahi bezala. Ohartu bigarren berdintzan 1.2 ariketa erabili dugula.

(ii) Hipotesiagatik, $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa da eta, beraz, polinomio homogeneoen bidez sor daiteke. Izan bedi $f \in \mathfrak{a}$ homogeneoa. Orduan, 5.8 teoreman ikusi bezala, existitzen da m non $f = X_0^m (f_*)^*$ baita. Bereziki, $f \in (\mathfrak{a}_*)^*$ dugu. Horrek $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}_*)^*$ partekotasuna frogatzen du.

Ikusteko berdintza ez dela oro har betetzen, nahikoa da f polinomio homogeneo bat hartzea, non $(f_*)^* \neq f$ baita. Orduan, $\mathfrak{a} = (f)$ ideal homogeneoa da, eta $(\mathfrak{a}_*)^* = ((f_*)^*)$ ideala ez da $\mathfrak{a}$-ren berdina. $\square$

Ohartu $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}_*)^*$ partekotasuna ez dela oro har betetzen $\mathfrak{a}$ ideala ez bada homogeneoa. Adibidez, $\mathfrak{a} = (X_0 - 1)$ hartzen badugu, orduan $(\mathfrak{a}_*)^* = \{0\}$ dugu.

5.2. Multzo aljebraiko afinen eta proiektiboen arteko erlazioa

Aurreko atalean garatu dugun tresneriaz baliatuz, orain $\mathbb{A}^n$-ko multzo aljebraikoen eta $\mathbb{P}^n$-ko multzo aljebraikoen arteko lotura zehazteko posizioan gaude. Oraindik ere lema pare bat behar ditugu, bai homogeneizazioak bai deshomogeneizazioak ideal erradikalak gordetzen dituztela ziurtatzen dutenak.

5.22. Teorema. *Izan bedi* $\mathfrak{a}$ $K[X_1, \dots, X_n]$*-ren ideal erradikala. Orduan,* $\mathfrak{a}^*$ *homogeneizatua* $K[X_0, \dots, X_n]$*-ren ideal erradikala da.*

FROGA. Definizioz, $\mathfrak{a}^*$ ideal homogeneoa da. Beraz, 4.12 teoremaren arabera, $\mathfrak{a}^*$ erradikala dela frogatu nahi badugu, nahikoa da $g^r \in \mathfrak{a}^*$ baldintzak $g \in \mathfrak{a}^*$ dakarrela ikustea, g polinomioa homogeneoa den kasuan. Lehenengo eta behin, $g^r \in \mathfrak{a}^*$ bada, orduan $(g_*)^r = (g^r)_* \in (\mathfrak{a}^*)_* = \mathfrak{a}$ dugu. Hortaz, $\mathfrak{a}$ ideal erradikala denez, $g_* \in \mathfrak{a}$ lortzen da. Homogeneizatuz, $(g_*)^* \in \mathfrak{a}^*$ dugu. Orain, badakigunez, g homogeneoa izateagatik, existitzen da m berretzaile bat non $g = X_0^m (g_*)^*$ baita. Hemendik, $g \in \mathfrak{a}^*$ ondorioztatzen dugu, nahi genuen moduan. □

5.23. Teorema. *Izan bedi* $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \dots, X_n]$*-ren ideal erradikal homogeneoa. Orduan,* $\mathfrak{a}_*$ *deshomogeneizatua* $K[X_1, \dots, X_n]$*-ren ideal erradikala da.*

FROGA. Izan bedi $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ halakoa non $f^r \in \mathfrak{a}_*$ den, eta frogatu dezagun $f \in \mathfrak{a}_*$ dela. Idatz dezagun, lehenengo eta behin, $f^r = g_*$ moduan, $g \in \mathfrak{a}$ izanik. Orain, deskonposatu g osagai homogeneotan, $g = g_0 + \cdots + g_\ell$, $\ell = \deg g$ izanik. Orduan, $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa izateagatik, $g_0, \dots, g_\ell \in \mathfrak{a}$ dugu. Ondorioz,

$$h = X_0^\ell g_0 + X_0^{\ell-1} g_1 + \cdots + X_0 g_{\ell-1} + g_\ell$$

polinomio homogeneoa $\mathfrak{a}$-n dago. (Ohartu h ez dela berez g-ren homogeneizatua, g polinomioan X_0 ager baitaiteke. Hala ere, h definitzeko homogeneizatuaren ideia bera jarraitu dugu: g-ren osagai homogeneo guztien maila g-ren mailarekin berdintzen dugu X_0-ren berretura egoki batez biderkatuz.) Orain, garbi dago $h_* = g_*$ dela eta, beraz, $f^r = h_*$ dugu. Orduan,

$$(f^*)^r = (f^r)^* = (h_*)^*$$

dugu eta, h homogeneoa izateagatik, $h = X_0^m (f^*)^r$ ondorioztatzen dugu, X_0^m izanik h zatitzen duen X_0-ren berreturarik handiena. Beraz,

$$(X_0^m f^*)^r = X_0^{mr} (f^*)^r = X_0^{m(r-1)} h \in \mathfrak{a}$$

da eta, $\mathfrak{a}$ ideal erradikala izateagatik, $X_0^m f^* \in \mathfrak{a}$ lortzen dugu. Deshomogeneizatuz,

$$f = (f^*)_* = (X_0^m f^*)_* \in \mathfrak{a}_*$$

dugu, nahi bezala. □

Aurreko teorema ez da betetzen $\mathfrak{a}$ ideala ez bada homogeneoa. Adibidez, $\mathfrak{a} = (X_0 + X_1^2 - 1)$ $K[X_0, X_1]$-en ideal erradikala da (are gehiago, ideal lehena), baina $\mathfrak{a}_* = (X_1^2)$ ez da erradikala $K[X_1]$-en.

Hurrengo teoreman, gaiaren hasieran egindako galderari erantzuna emango diogu: V-ren ekuazioak ezagunak badira, zein dira V^*-ren ekuazioak? Hori V eta V^* definitzeko balio duten idealen bidez lortuko dugu.

5.24. Teorema. *Izan bedi* $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *multzo aljebraiko afina, eta demagun* K *gorputza* aljebraikoki itxia *dela. Orduan:*

(i) $V = V(\mathfrak{a})$ *bada,* $V^* = V_+(\mathfrak{a}^*)$ *dugu.*
(ii) $I(V) = \mathfrak{a}$ *bada,* $I_+(V^*) = \mathfrak{a}^*$ *dugu.*

FROGA. (i) $\subseteq$) Nahikoa da $V \subseteq V_+(\mathfrak{a}^*)$ partekotasuna ikustea. Izan ere, $V_+(\mathfrak{a}^*)$ multzo aljebraiko proiektiboa denez, orduan $V^* \subseteq V_+(\mathfrak{a}^*)$ lortzen dugu zuzenean, V^* izateagatik V barruan duten multzo aljebraiko proiektiboetatik txikiena.

Ikus dezagun, bada, $V \subseteq V_+(\mathfrak{a}^*)$ dela. Partekotasun horrek zentzua du identifikatzen badugu $\mathbb{A}^n$ espazio afina U_0 multzoarekin, hau da, $(a_1, \dots, a_n)$ puntu afinaren ordez $(1 : a_1 : \cdots : a_n)$ puntu proiektiboa hartzen badugu. Orduan, $(a_1, \dots, a_n) \in V$ puntu orokor bat harturik, $(1 : a_1 : \cdots : a_n) \in V_+(\mathfrak{a}^*)$ dela frogatu behar dugu. Orain, $\mathfrak{a}^* = (f^* \mid f \in \mathfrak{a})$ denez, nahikoa da f^* polinomioa $(1 : a_1 : \cdots : a_n)$ puntuan anulatzen dela ikustea $f \in \mathfrak{a}$ guztietarako. Hau 5.9 teoremaren ondorio hutsa da: kontuan izan $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ dugula, $(a_1, \dots, a_n) \in V = V(\mathfrak{a})$ eta $f \in \mathfrak{a}$ izateagatik.

$\supseteq$) Alderantzizko partekotasunaren frogan bezala, V azpimultzo aljebraiko afina U_0-ren barruan sartuta ikusiko dugu. Orduan, $I(V)$ zein $I_+(V)$ idatz dezakegu. Gure helburua $I_+(V) \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{a}^*$ partekotasuna frogatzea izango da. Behin hori lorturik, V_+ eragilea aplikatuz,

$$V_+(\mathfrak{a}^*) = V_+(\operatorname{rad} \mathfrak{a}^*) \subseteq V_+(I_+(V)) = \overline{V} = V^*$$

desiratutako emaitza lortuko dugu.

Frogatu dezagun, orduan, $I_+(V) \subseteq \operatorname{rad} \mathfrak{a}^*$ dela. Gogoratu $I_+(V)$ ideala V-ren gainean anulatzen diren polinomio homogeneoek sortzen dutela; beraz, nahikoa da polinomio horiek $\operatorname{rad} \mathfrak{a}^*$-n daudela ikustea. Izan bedi f sortzaile horietako edozein. Orduan, $(a_1, \dots, a_n) \in V$ bada, f polinomioa $(1 : a_1 : \cdots : a_n)$ puntuaren gainean anulatzen da eta, beraz, 5.10 teoremaren arabera, f_* deshomogeneizatua $(a_1, \dots, a_n)$ puntuan anulatzen da. Bestela esanda $f_* \in I(V)$ dugu. Orain, K aljebraikoki itxia denez eta $V = V(\mathfrak{a})$ denez, Nullstellensatz afinak $f_* \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}$ ematen du. Orduan, existitzen da $r \geq 1$ non $(f^r)_* = (f_*)^r \in \mathfrak{a}$. Badakigunez, m-ren batentzat $f^r = X_0^m((f^r)_*)^*$ dugu eta, honen ondorioz, $f^r \in \mathfrak{a}^*$. Horrela, $f \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}^*$ lortzen dugu, nahi genuen moduan.

(ii) Alde batetik, $I(V) = \mathfrak{a}$ izateagatik, $V = V(\mathfrak{a})$ ere badugu eta, (i) atalaren ondorioz, $V^* = V_+(\mathfrak{a}^*)$. Bestetik, $\mathfrak{a}$ ideal erradikalari 5.22 teorema aplikatuz, $\mathfrak{a}^*$ ere erradikala dela lortzen dugu. Ohartu, gainera, $\mathfrak{a}^* \neq (X_0, X_1, \dots, X_n)$ dela. Izan ere, berdintza beteko balitz, orduan

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}^*)_* = (1, X_1, \dots, X_n) = K[X_1, \dots, X_n]$$

eta, beraz, $\mathfrak{a}^* = K[X_0, \dots, X_n]$ izango genuke, egindako hipotesiaren kontra. Orain, K aljebraikoki itxia denez, Nullstellensatz proiektiboa erabil dezakegu eta $I_+(V^*) = I_+(V_+(\mathfrak{a}^*)) = \mathfrak{a}^*$ lortzen dugu, $\mathfrak{a}^*$ ideal erradikal homogeneoa eta ideal baztergarriaren desberdina izateagatik. $\square$

Aurreko teorema ez da egiazkoa K gorputza ez bada aljebraikoki itxia. Hartu, adibidez, $f(X, Y) = X^2 + Y^4 \in \mathbb{R}[X, Y]$, $\mathfrak{a} = (f)$ eta $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Orduan, $V = \{(0, 0)\}$ dugu eta, hortaz, $V^* = \{(0 : 0 : 1)\}$. (Kontuan izan puntuak itxiak direla espazio proiektiboan, 5.8 ariketan ikusiko dugun bezala. Bestetik, ohartu $\mathbb{A}^2$ U_2-rekin identifikatzen ari garela, eta ez U_0-rekin, garapen teorikoan egiten dugun bezala.) Homogeneizatzeko Z indeterminatu berria erabiltzen badugu, orduan $\mathfrak{a}^* = (f^*)$ dugu, $f^* = X^2Z^2 + Y^4$ izanik. Beraz,

$$\begin{aligned} V_+(\mathfrak{a}^*) &= V_+(X^2Z^2 + Y^4) = \{(a : 0 : c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid a = 0 \text{ edo } c = 0\} \\ &= \{(0 : 0 : 1), (1 : 0 : 0)\} \end{aligned}$$

ez dator bat V^*-rekin eta teoremaren (i) atalak huts egiten du.

5.25. Adibideak. 1) Izan bedi V hipergainazal afina, $f = 0$ ekuazioaren bidez emana. Orduan, 5.16 teoremaren eta aurreko teoremaren arabera, V^* itxidura proiektiboaren ekuazioa $f^* = 0$ da. Hala ere, $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ sortzaile bat baino gehiagorekin emanda dagoenean ez denez beti betetzen $\mathfrak{a}^* = (f_1^*, \ldots, f_r^*)$ denik, ezin dugu esan V-ren ekuazioak $f_1 = 0, \ldots, f_r = 0$ direnean V^*-ren ekuazioak $f_1^* = 0, \ldots, f_r^* = 0$ direnik. Arazo hori gainditzeko, 5.19 teorema erabil dezakegu. Horren arabera, $\{g_1, \ldots, g_t\}$ $\mathfrak{a}$-ren Gröbnerren oinarria bada, maila gordetzen duen ordena monomial batekiko, orduan V-ren ekuazioak $g_1 = 0, \ldots, g_t = 0$ dira, eta V^*-renak, berriz, $g_1^* = 0, \ldots, g_t^* = 0$.

2) $Y = X$ eta $Y = X + 1$ zuzenek ez dute ebakitze-punturik $\mathbb{A}^2$-n. Zer gertatzen da $\mathbb{P}^2$-n? Hori ikusteko, zuzen horien itxidura proiektiboak hartuko ditugu. Aurreko oharraren arabera, itxiduren ekuazioak $Y = X$ eta $Y = X + Z$ dira, eta horiek ebakitze-puntu bat dute: $(1 : 1 : 0)$ alegia.

3) Zein dira $X^2 + Y^2 = 1$ zirkunferentziaren infinituko puntuak $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$-n? Itxidura proiektiboaren ekuazioa $X^2 + Y^2 = Z^2$ da eta infinituko puntuak $Z = 0$ eginez lortzen dira. Garbi dago bi puntu lortzen ditugula: $(1 : i : 0)$ eta $(1 : -i : 0)$. Horiei zirkunferentziaren *puntu zikliko* deritze.

Antzeko teorema bat eman dezakegu V multzo proiektibo batetik V_* multzo afinera pasatzeko. Ohartu kasu honetan ez dugula behar K aljebraikoki itxia izaterik.

5.26. Teorema. *Izan bedi $V \subseteq \mathbb{P}^n$ multzo aljebraiko proiektiboa. Orduan:*

(i) *$V = V_+(\mathfrak{a})$ bada, $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa izanik, orduan $V_* = V(\mathfrak{a}_*)$ dugu.*
(ii) *$I_+(V) = \mathfrak{a}$ bada, orduan $I(V_*) = \mathfrak{a}_*$ dugu.*

FROGA. (i) Izan bedi $\{f_i \mid i \in I\}$ polinomio homogeneoek osatutako $\mathfrak{a}$-ren sistema sortzailea. Orduan, $V = V_+(f_i \mid i \in I)$ dugu eta, 5.9 proposizioa erabiliz, $V_* = V((f_i)_* \mid i \in I)$ lortzen dugu. Bestetik, 5.21 teoremaren arabera, $\mathfrak{a}_* = ((f_i)_* \mid i \in I)$ dugu. (Enuntziatua sortzaile kopuru finitu batekin emanda badago ere, sistema sortzaile infinituekin ere balio du.) Horrela, $V_* = V(\mathfrak{a}_*)$ ondorioztatzen dugu, nahi bezala.

(ii) $\subseteq$) Izan bedi $f \in I(V_*)$. Orduan, $(a_1, \ldots, a_n) \in V_*$ puntu guztietarako, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ dugu eta, ondorioz, $f^*(1 : a_1 : \cdots : a_n) = 0$ ere bai. Jarri $g = X_0 f^*$. Polinomio hori $\mathbb{P}^n$-ren infinituko hiperplanoan anulatzen da, eta V-ko puntu afinen gainean ere bai. Beraz, g V-ren gainean anulatzen da, hau da,

$g \in I_+(V) = \mathfrak{a}$ dugu. Orduan, $g_* \in \mathfrak{a}_*$ dugu, eta $g_* = (X_0)_*(f^*)_* = f$ denez, $f \in \mathfrak{a}_*$ lortzen dugu.

$\supseteq$) Izan bedi orain $f \in \mathfrak{a}_*$. Orduan, existitzen da $g \in \mathfrak{a}$, halakoa non $f = g_*$ baita. Har dezagun $(a_1, \dots, a_n)$ edozein puntu V_* multzoan. Orduan, $g \in I_+(V)$ denez, $g(1 : a_1 : \cdots : a_n) = 0$ dugu. Beraz, $f(a_1, \dots, a_n) = g_*(a_1, \dots, a_n) = 0$, eta $f \in I(V_*)$ dugu, nahi bezala. $\square$

Aurreko teoremaren (i) atala ez da egiazkoa $\mathfrak{a}$ ideala ez bada homogeneoa. Hartu, adibidez, $\mathfrak{a} = (X_0 - X_1^2)$ eta $V = V_+(\mathfrak{a})$. Alde batetik, $\mathfrak{a}$ idealean polinomio homogeneo bakarra 0 denez, $V = V_+(0) = \mathbb{P}^1$ eta $V_* = \mathbb{A}^1$ dugu. Baina kasu honetan $V(\mathfrak{a}_*) = V(1 - X_1^2) = \{1, -1\}$ baino ez da eta, beraz, ez da betetzen (i) ataleko berdintza.

5.3. Barietate afinen eta proiektiboen arteko erlazioa

Multzo aljebraikoen artean, barietateak bereizi ditugu oinarrizko osagai gisa. Egiten ari garen estudio honetan, logikoa dirudi galdetzeak zein erlazio dagoen barietate afinen eta proiektiboen artean. Gakoa ondorengo bi teoremetan dago.

5.27. Teorema. *Izan bedi* $\mathfrak{a}$ $K[X_1, \dots, X_n]$*-ren ideal lehena. Orduan,* $\mathfrak{a}^*$ *homogeneizatua* $K[X_0, \dots, X_n]$*-ren ideal lehena da.*

FROGA. Lehenengo eta behin, ohartu $\mathfrak{a}^*$ $K[X_0, \dots, X_n]$-ren ideal propioa dela. Izan ere, bestela balitz, orduan $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}^*)_*$ propietatea erabiliz, $\mathfrak{a} = K[X_1, \dots, X_n]$ izango genuke eta $\mathfrak{a}$ ez litzateke ideal lehena izango.

Orain, $\mathfrak{a}^*$ ideal homogeneoa izateagatik eta 4.12 teoremagatik, nahikoa da inplikazio hau frogatzea:

$$\left.\begin{array}{r} fg \in \mathfrak{a}^* \\ f \text{ eta } g \text{ homogeneoak} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in \mathfrak{a}^* \text{ edo } g \in \mathfrak{a}^*.$$

Hasteko, $fg \in \mathfrak{a}^*$ baldintzatik, deshomogeneizatuz, $f_*g_* \in (\mathfrak{a}^*)_* = \mathfrak{a}$ lortzen dugu. Gogoan izanik $\mathfrak{a}$ ideal lehena dela, $f_* \in \mathfrak{a}$ edo $g_* \in \mathfrak{a}$ dela ondoriozta dezakegu. Demagun, orokortasuna galdu gabe, $f_* \in \mathfrak{a}$ dela. Orduan, f homogeneoa denez, $f = X_0^m(f_*)^*$ dugu m berretzaileren baterako. Horrela $f \in \mathfrak{a}^*$ lortzen dugu, froga bukatuz. $\square$

Antzeko emaitza bat dugu ideal lehenen deshomogeneizazioarekin, baina lehenengo honako lema hau frogatu behar dugu.

5.28. Lema. *Izan bedi* $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \dots, X_n]$*-ren ideal lehen homogeneoa, eta demagun* $X_0 \notin \mathfrak{a}$ *dela. Orduan,* $(\mathfrak{a}_*)^* = \mathfrak{a}$ *dugu.*

FROGA. Alde batetik, 5.21 teoreman ikusi bezala, badakigu $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa izateagatik $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}_*)^*$ betetzen dela. Alderantzizko partekotasuna lortzeko, kontuan izanik

$$(\mathfrak{a}_*)^* = ((f_*)^* \mid f \in \mathfrak{a})$$

dugula, nahikoa da $(f_*)^* \in \mathfrak{a}$ dela frogatzea $f \in \mathfrak{a}$ guztietarako. Horretarako, deskonposatu f osagai homogeneotan, $f = f_0 + \cdots + f_\ell$, $\ell = \deg f$ izanik. Orain, $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa izateagatik, $f_0, \ldots, f_\ell \in \mathfrak{a}$ dugu. Ondorioz,

$$g = X_0^\ell f_0 + X_0^{\ell-1} f_1 + \cdots + X_0 f_{\ell-1} + f_\ell$$

polinomio homogeneoa $\mathfrak{a}$-n dago, eta $g_* = f_*$ dugu. Orduan, m berretzaileren baterako $g = X_0^m (g_*)^* = X_0^m (f_*)^*$ dugu. Hemendik, $X_0^m (f_*)^* \in \mathfrak{a}$ lortzen dugu eta, $\mathfrak{a}$ ideal lehena izateagatik, $X_0 \in \mathfrak{a}$ edo $(f_*)^* \in \mathfrak{a}$ dugu. Hipotesiaren arabera $X_0 \notin \mathfrak{a}$ denez, $(f_*)^* \in \mathfrak{a}$ lortzen dugu, nahi bezala. □

5.29. Teorema. *Izan bedi* $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \ldots, X_n]$*-ren ideal lehen homogeneoa,* $X_0 \notin \mathfrak{a}$ *izanik. Orduan,* $\mathfrak{a}_*$ *deshomogeneizatua* $K[X_1, \ldots, X_n]$*-ren ideal lehena da.*

Froga. Ohartu $(\mathfrak{a}_*)^* = \mathfrak{a}$ berdintza dugula, azken lemaren arabera, $X_0 \notin \mathfrak{a}$ izateagatik.

Lehenengo eta behin, $\mathfrak{a}_*$ $K[X_1, \ldots, X_n]$-ren ideal propioa dela ikusiko dugu. Bestela balitz, orduan

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_*)^* = (K[X_1, \ldots, X_n])^* = K[X_0, \ldots, X_n]$$

izango genuke, eta $\mathfrak{a}$ ez litzateke ideal lehena izango.

Orain, $\mathfrak{a}_*$ ideal lehena dela ikusteko, demagun $fg \in \mathfrak{a}_*$ dela eta frogatu dezagun $f \in \mathfrak{a}_*$ edo $g \in \mathfrak{a}_*$ dela. Lehenengo eta behin, $fg \in \mathfrak{a}_*$ baldintza homogeneizatuz, $f^* g^* \in (\mathfrak{a}_*)^* = \mathfrak{a}$ dugu. Hemendik, $\mathfrak{a}$ ideal lehena izateagatik, $f^* \in \mathfrak{a}$ edo $g^* \in \mathfrak{a}$ lortzen dugu. Orain, deshomogeneizatuz, $f = (f^*)_* \in \mathfrak{a}_*$ edo $g = (g^*)_* \in \mathfrak{a}_*$, nahi bezala. □

5.30. Teorema. *Izan bedi* K *gorputz* aljebraikoki itxia.

(i) $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *barietatea bada, orduan* $V^* \subseteq \mathbb{P}^n$ *ere barietatea da.*

(ii) $V \subseteq \mathbb{P}^n$ *barietatea bada, eta ez badago infinituko hiperplanoan sartuta, orduan* $V_* \subseteq \mathbb{A}^n$ *ere barietatea da.*

Froga. (i) Jarri $\mathfrak{a} = I(V)$. Ideal hau lehena da $K[X_1, \ldots, X_n]$-n, V barietate afina izateagatik. Orain, 5.24 teoremaren arabera, $I_+(V^*) = \mathfrak{a}^*$ dugu, eta $\mathfrak{a}^*$ $K[X_0, \ldots, X_n]$-ren ideal lehena da, 5.27 teorema erabiliz. Azkenik, 4.30 teoreman ikusi bezala, $I_+(V^*)$ ideal lehena bada, V^* barietatea da espazio proiektiboan.

(ii) Hau guztiz antzekoa da. Jarri $\mathfrak{a} = I_+(V)$. Ideal hau lehena da $K[X_0, \ldots, X_n]$-n, V barietate proiektiboa izateagatik. Orain, 5.26 teoremaren arabera, $I(V_*) = \mathfrak{a}_*$ dugu, eta $\mathfrak{a}_*$ $K[X_1, \ldots, X_n]$-ren ideal lehena da, 5.29 teorema erabiliz. (Ohartu $X_0 \notin \mathfrak{a}$ dugula: bestela, $V = V_+(\mathfrak{a}) \subseteq V_+(X_0)$ dugu eta V infinituko hiperplanoan sartuta dago, kontraesan bat dena.) Beraz, $I(V_*)$ ideal lehena da, eta V_* barietatea da espazio afinean. □

5.31. Teorema. *Izan bedi $V \subseteq \mathbb{A}^n$ multzo aljebraiko afina. Orduan, $(V^*)_* = V$ dugu.*

Froga. Definizioz, V^* V-ren itxidura da $\mathbb{P}^n$-ren Zariskiren topologiarekiko. Beraz, aurreko gaian ikusi bezala, $V^* = V_+(I_+(V))$ dugu. Orduan, 5.26 teoremaren arabera, $(V^*)_* = V(I_+(V)_*)$ dugu. Ikusten badugu $I_+(V)_* = I(V)$ dela, orduan $(V^*)_* = V(I(V)) = V$ lortuko dugu, V multzo aljebraiko afina izateagatik.

Ikus dezagun, bada, $I_+(V)_* = I(V)$ dela. Alde batetik, $f \in I(V)$ bada, orduan $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ dugu $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ guztietarako. Beraz, 5.9 teorema erabiliz, $f^* \in I_+(V)$ dugu eta, ondorioz, $f = (f^*)_* \in I_+(V)_*$. Horrek $I(V) \subseteq I_+(V)_*$ partekotasuna frogatzen du. Bestetik, $I_+(V)_* = (g_* \mid g \in I_+(V) \text{ homogeneoa})$ dugu. Orain, g homogeneoa bada, 5.10 teoremagatik, $g \in I_+(V)$ dugu baldin eta soilik baldin $g_* \in I(V)$ bada. Hori dela eta, $I_+(V)_* \subseteq I(V)$ ondorioztatzen dugu. □

Aurreko teorema askoz azkarrago frogatu daiteke K gorputza aljebraikoki itxia bada. Izan ere, kasu horretan, $V = V(\mathfrak{a})$ bada, orduan $V^* = V_+(\mathfrak{a}^*)$ dugu, 5.24 teoremaren arabera. Beraz,

$$(V^*)_* = V((\mathfrak{a}^*)_*) = V(\mathfrak{a}) = V$$

lortzen dugu, 5.26 eta 5.16 teoremak erabiliz, hurrenez hurren.

5.32. Teorema. *Izan bedi K gorputz* aljebraikoki itxia. *Orduan, $V \subseteq \mathbb{P}^n$ barietatea bada eta ez badago infinituko hiperplanoan sartuta, $(V_*)^* = V$ dugu.*

Froga. Jarri $\mathfrak{a} = I_+(V)$. Orduan $V = V_+(\mathfrak{a})$ dugu, eta $\mathfrak{a}$ ideal lehen homogeneoa da, V barietatea delako. Beraz,

$$(V_*)^* = (V(\mathfrak{a}_*))^* = V_+((\mathfrak{a}_*)^*)$$

dugu, K aljebraikoki itxia delako. Orain, $X_0 \notin \mathfrak{a}$ frogatzen badugu, $(\mathfrak{a}_*)^* = \mathfrak{a}$ lortuko dugu 5.28 lema aplikatuz, eta hortik $(V_*)^* = V_+(\mathfrak{a}) = V$, nahi bezala. Demagun, absurdora eramanez, $X_0 \in \mathfrak{a}$ dela. Orduan, $V = V_+(\mathfrak{a}) \subseteq V_+(X_0)$ dugu, hau da, V infinituko hiperplanoan sartuta dago, eta hori hipotesiaren kontra doa. □

5.33. Teorema. *Izan bedi K gorputz* aljebraikoki itxia. *Orduan, $V \mapsto V^*$ eta $V \mapsto V_*$ aplikazioak elkarren alderantzizkoak dira, alde batetik* barietate afin guztiak *eta bestetik* infinituko hiperplanoan sarturik ez dauden barietate proiektibo guztiak *hartzen baditugu. Ondorioz, mota horietako barietateak bijekzioan daude.*

Froga. Azken bi teoremen ondorio berehalakoa da. □