4

Multzo aljebraiko proiektiboak

4.1. Espazio proiektiboa

4.1. Definizioa. Izan bitez K gorputza eta $n \in \mathbb{N}$. Orduan, n dimentsioko *espazio proiektiboa* $\mathbb{A}^{n+1}$-en zuzen bektorialen multzoa da. Hau adierazteko $\mathbb{P}^n(K)$ idazten dugu, edo $\mathbb{P}^n$ soilik, ez badago zalantzarik gorputza zein den.

Zuzen bektorial bat zehazteko, nahikoa da zuzenaren norabidea ematen duen bektore bat ematea. Ohartu bektore hori ezin dela nulua izan. Beraz, $\mathbb{P}^n$-ko puntuak adierazteko $\mathbb{A}^{n+1}$-eko bektore ez-nuluak erabil ditzakegu. Idatz dezagun $(a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ ikurraren bitartez $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ bektore ez-nuluak* determinatzen duen zuzen bektoriala. Orduan,

$$\mathbb{P}^n = \{(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \mid a_i \in K \text{ ez denak } 0\}$$

dugu. Beraz $(0 : \cdots : 0)$ ez da $\mathbb{P}^n$-ko puntua. Gainera,

$$\begin{aligned}(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) &= (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)\\ &\iff (a_0, a_1, \ldots, a_n) \text{ eta } (b_0, b_1, \ldots, b_n) \text{ proportzionalak.}\end{aligned}$$

Ondorioz, $(a_0 : \cdots : a_n)$ puntu proiektibo bat idazteko, ditugun aukera guztiak $(\lambda a_0 : \cdots : \lambda a_n)$ dira, $\lambda \in K^\times$ izanik. Ohartu $\mathbb{P}^n$-ko puntuak adierazteko $n+1$ osagai behar ditugula.

4.2. Adibideak. 1) $(2 : -1 : 0) = (-2 : 1 : 0) = (1 : -1/2 : 0) = (16 : -8 : 0)$ dugu $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$-n.

2) $(2 : i : 0 : -i) = (1 : i/2 : 0 : -i/2) = (-2i : 1 : 0 : -1) = (2i : -1 : 0 : 1)$ dugu $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$-n.

3) Oro har, demagun $P = (a_0 : a_1 : \cdots : a_n)$ $\mathbb{P}^n$-ko puntu bat dela. Orduan:

(i) $a_i \neq 0$ bada, $P = (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)$ idatz dezakegu, $b_i = 1$ izanik. Horretarako, hartu $b_j = a_j/a_i$, $0 \leq j \leq n$ guztietarako.

*Hemendik aurrera, $\mathbb{A}^{n+1}$ espazio afina $\mathbb{P}^n$ espazio proiektiboarekin lotuta agertzen denean, $\mathbb{A}^{n+1}$-eko puntuak $(a_0, \ldots, a_n)$ moduan idatziko ditugu, orain arte ohikoa izan den $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ notazioaren ordez. Koherentziagatik, osagai horiei dagozkien indeterminatuak $X_0, \ldots, X_n$ izendatuko ditugu, eta polinomioak $K[X_0, \ldots, X_n]$ aljebraren barruan hartuko ditugu, $\mathbb{A}^{n+1}$-eko puntuak zein polinomiotarako anulatzen diren aztertu behar dugunean.

(ii) $a_i = 0$ bada, orduan $P = (b_0 : b_1 : \cdots : b_n)$ adierazpen guztietan $b_i = 0$ dugu.

$\mathbb{P}^n$ espazio proiektiboa $\mathbb{A}^{n+1}$ espazio afinean oinarrituz definitu dugu, eta $\mathbb{A}^{n+1}$ espazio bektoriala da bereziki. Hala ere, $\mathbb{P}^n$ ez da espazio bektoriala eragiketa naturalekin, batuketa ez baitago ondo definiturik. Adibidez, $(1:0) = (2:0)$ dugu, baina

$$(1:0) + (0:1) = (1:1) \neq (2:0) + (0:1) = (2:1).$$

Zer gertatzen da eskalarrezko biderketarekin?

Finka dezagun $0 \leq i \leq n$ indize bat. Orduan,

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i & : & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1 : \cdots : x_i : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n) \end{array}$$

aplikazioa injektiboa da. Beraz, $\mathbb{A}^n$ eta $U_i = \varphi_i(\mathbb{A}^n)$ bijekzioan daude. Orduan, U_i multzoari $\mathbb{P}^n$-ren *zati afin* deritzogu. Ohartu U_i honela ere idatz dezakegula:

$$\begin{aligned} U_i &= \{(a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \cdots : a_n) \mid a_j \in K\} \\ &= \{(a_0 : \cdots : a_{i-1} : a_i : a_{i+1} : \cdots : a_n) \mid a_j \in K,\ a_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

Ondorioz, $\mathbb{P}^n = U_i \dot{\cup} H_i$ (bildura disjuntua) dugu,

$$H_i = \{(a_0 : \cdots : a_{i-1} : 0 : a_{i+1} : \cdots : a_n) \mid a_j \in K \text{ ez denak } 0\}$$

izanik. Azken multzo honi *infinituko hiperplano* eta bere puntuei *infinituko puntu* deitzen zaie.

Garrantzitsua da azpimarratzea $\mathbb{P}^n$-ren zati afina eta infinituko hiperplanoa i-ren aukeraren araberakoak direla.

Orain espazio proiektiboaren definizioa orokortuko dugu.

4.3. Definizioa. Izan bedi V espazio bektorial ez-nulua. Orduan, *V-ren espazio proiektiboa*, $\mathbb{P}V$, V-ren zuzen bektorialen multzoa da. Gainera, $\dim V = m$ bada, $\mathbb{P}V$-ren dimentsioa $m-1$ dela esango dugu.

Beraz, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}K^{n+1}$ dugu eta $\mathbb{P}^n$-ren dimentsioa n da. Esan dugunez, espazio proiektibo bat ez da espazio bektoriala. Beraz, kasu honetan, dimentsioa hitz egiteko modu bat baino ez da, ez du zerikusirik oinarriekin.

4.4. Definizioa. Izan bitez V espazio bektoriala eta W V-ren azpiespazio ez-nulua. Orduan, $\mathbb{P}W$ $\mathbb{P}V$-ren *azpiespazio proiektibo* bat dela diogu.

4.5. Adibideak. 1) $\mathbb{P}V$-ko puntuak azpiespazio proiektiboak dira, 0 dimentsiokoak. Izan ere, V-ren zuzen bektorialetatik datoz.

2) Bat dimentsioko azpiespazio proiektiboei *zuzen* deritze. Hauek V-ren plano bektorialetatik datoz.

3) Izan bedi H V-ren hiperplano bektoriala. Orduan, $\mathbb{P}H$ $\mathbb{P}V$-ren *hiperplano* proiektibo bat dela diogu. Ohartu $\dim \mathbb{P}H = \dim \mathbb{P}V - 1$ dela.

4) Izan bedi H_i $\mathbb{P}^n$-ren infinituko hiperplano bat, $0 \leq i \leq n$ izanik. Izan bedi J_i, $X_i = 0$ ekuazioaren bidez definiturik dagoen $\mathbb{A}^{n+1}$-en hiperplano bektoriala. Orduan, $H_i = \mathbb{P}J_i$ dugu eta H_i aurreko definizioaren arabera ere hiperplanoa da.

4.2. Polinomio homogeneoak eta ideal homogeneoak

Izan bitez $(a_0 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ eta $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$. Nola defini daiteke $f(a_0 : \cdots : a_n)$ balioa? Aukerarik naturalena dirudi

$$f(a_0 : \cdots : a_n) = f(a_0, \ldots, a_n)$$

jartzeak. Adibidez, $f(X, Y) = X - Y^2$ bada, orduan aurreko erregelari jarraiturik $f(1 : 1) = 0$ eta $f(2 : 2) = -2$ dugu. Orain, $\mathbb{P}^1$ zuzen proiektiboan $(1 : 1) = (2 : 2)$ denez, honek esan nahi du $f(1 : 1)$ balioa ez dagoela ondo definiturik. Ondorioz, ikusten dugu ezin dela polinomio baten balioari buruz hitz egin espazio proiektiboko puntu baten gainean. Hori dela eta, ez dugu erabiliko $f(a_0 : \cdots : a_n)$ bezalako adierazpenik, bakarrik idatz dezakegu $f(a_0, \ldots, a_n)$.

Aurreko adibidean $f(1, 1) = 0$ eta $f(2, 2) \neq 0$ genuen. Beraz, $(1 : 1)$ puntua f-ren zeroa den edo ez den esateak ere ez du zentzurik. Azter dezagun orain $g(X, Y) = X^2 - Y^2$ polinomioa. Kasu horretan, $g(1, 1) = 0$ eta $g(2, 2) = 0$ dugu. Gainera, $(1 : 1)$ puntua idazteko aukera guztiak hartzen baditugu, hau da, $(\lambda : \lambda)$ non $\lambda \in K^\times$, orduan $g(\lambda, \lambda) = 0$ ere badugu. Beraz, $(1 : 1)$ g-ren zero proiektiboa dela esan daiteke. Are gehiago, $P = (a : b) \in \mathbb{P}^1$ edozein izanik, $\lambda \in K^\times$ guztietarako

$$g(\lambda a, \lambda b) = \lambda^2 g(a, b)$$

dugu eta, ondorioz, P idazteko aukera guztietarako, g-ren balioa beti 0ren berdina edo beti 0ren desberdina aterako da. Horrela, zentzua du P g-ren zeroa den edo ez den esateak. Zein diferentzia dago f eta g polinomioen artean, zeroei dagokienez hain jokaera desberdina izateko?

4.6. Definizioa. Polinomio bat *homogeneoa* dela esaten dugu hori osatzen duten monomio guztiek maila oso bera badute.

Adibidez, $f(X, Y, Z) = X^3 + XYZ + XY^2 + YZ^2$ homogeneoa da eta $g(X, Y, Z) = X^2 - XY + XYZ$ ez da homogeneoa.

Har dezagun f edozein polinomio. Orduan, f modu bakar batean deskonposa daiteke

$$f = \sum_{i \geq 0} f_i \tag{4.1}$$

gisa, f_i bakoitza i mailako polinomio homogeneoa izanik. (Hemendik aurrera, ez badugu kontrakoa esaten, polinomio baten mailaz hitz egiten dugunean, maila osoa esan nahi dugu.) Horretarako, hartu f_i modura f-n agertzen diren i mailako gai guztien batura. Ohartu $f_i = 0$ dela $i > \deg f$ bada eta, beraz, (4.1)-eko batura finitua dela, $i \geq 0$ guztietara hedatzen bada ere. Polinomio homogeneo horiei f-ren *osagai homogeneo* deitzen zaie. Adibidez,

$$f(X,Y) = X^3 + X^2Y + XY + Y^2 + Y + 1$$

bada, orduan $f_3 = X^3 + X^2Y$, $f_2 = XY + Y^2$, $f_1 = Y$ eta $f_0 = 1$ dugu.

4.7. Teorema. *Izan bedi $f \in K[X_0, \dots, X_n]$ polinomio homogeneoa, d mailakoa. Orduan,*

$$f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \dots, a_n), \quad \lambda \in K \text{ guztietarako.}$$

FROGA. Nahikoa da emaitza d mailako monomioetarako betetzen dela ikustea. Izan bedi $g(X_0, \dots, X_n) = X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n}$ monomioa, $i_0 + \dots + i_n = d$ izanik. Orduan,

$$\begin{aligned} g(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) &= (\lambda a_0)^{i_0} \dots (\lambda a_n)^{i_n} = \lambda^{i_0 + \dots + i_n} a_0^{i_0} \dots a_n^{i_n} \\ &= \lambda^d g(a_0, \dots, a_n), \end{aligned}$$

nahi bezala. □

Azken teorema honen ondorioz, f polinomio homogeneoa bada, zentzua du $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ puntua f-ren zeroa den edo ez den esateak. Beraz, kasu honetan, $f(a_0 : \dots : a_n) = 0$ edo $f(a_0 : \dots : a_n) \neq 0$ idatz dezakegu, baina inola ere ez $f(a_0 : \dots : a_n)$ balioa solte! Laster ikusiko dugunez, K *aljebraikoki itxia* bada, alderantzizkoa ere betetzen da: f-ren zero proiektiboei buruz hitz egin badaiteke, orduan f homogeneoa da.

Ikus ditzagun polinomio homogeneoen beste propietate batzuk. Froga begibistakoa da eta, horregatik, ez dugu emango.

4.8. Teorema. *Izan bitez f eta g polinomioak. Orduan:*

(i) *f eta g homogeneoak badira, $f \neq 0$ eta $g \neq 0$ izanik, orduan $f+g$ homogeneoa da baldin eta soilik baldin* $\deg f = \deg g$ *bada.*
(ii) *f eta g homogeneoak badira, orduan fg ere homogeneoa da. Alderantziz, fg homogeneoa bada, $f \neq 0$ eta $g \neq 0$ izanik, orduan bai f bai g homogeneoak dira.*

Gröbnerren oinarrien teorian ideal monomialak, hau da, monomioen bidez sor daitezkeen idealak, garrantzi handikoak ziren. Jarraian ideal mota orokorrago bat definitzen dugu.

4.9. Definizioa. Izan bedi $\mathfrak{a}$ polinomioen ideala. Orduan, $\mathfrak{a}$ *ideal homogeneoa* dela esaten dugu polinomio homogeneoen bidez sor badaiteke.

Izan bedi $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa. Baldin badakigu $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ dela, ezin dugu oro har baieztatu $f_1, \dots, f_r$ polinomioak homogeneoak direnik. Hala ere, $\mathfrak{a} = (f)$ ideal nagusia bada, orduan egia da f-k homogeneoa izan behar duela, ondorengo proposizioan ikusten dugun bezala.

4.10. Proposizioa. *Izan bedi $\mathfrak{a} = (f)$ polinomioen ideal homogeneoa. Orduan, f homogeneoa da.*

FROGA. Jakina, $f \neq 0$ dela pentsa dezakegu, hau da, $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ dela. Ideal homogeneoaren definizioaren arabera, $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ idatz dezakegu, $f_1, \ldots, f_r$ polinomio guztiak homogeneoak izanik. Ohartu polinomio horietariko bat, adibidez f_1, ez dela 0 izango. Orain, $f_1 \in \mathfrak{a} = (f)$ izateagatik, $f_1 = q_1 f$ dugu q_1 polinomio baterako. Beraz, 4.8 teoremaren (ii) atala aplikatuz, f homogeneoa dela ondorioztatzen dugu. □

Hurrengo teorema ideal monomialek betetzen duten emaitza baten antzekoa da.

4.11. Teorema. *Izan bedi $\mathfrak{a}$ polinomioen ideala. Orduan, baliokideak dira:*

(i) *$\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa da.*

(ii) *$f \in \mathfrak{a}$ dugu baldin eta soilik baldin f-ren osagai homogeneo guztiak $\mathfrak{a}$-n badaude.*

FROGA. (i)⇒(ii). Izan bedi $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa. Alde batetik, f-ren osagai homogeneo guztiak $\mathfrak{a}$-n badaude, orduan garbi dago f, horien batura izateagatik, $\mathfrak{a}$-n ere egongo dela. Demagun orain $f \in \mathfrak{a}$ dela. Idatzi $\mathfrak{a} = (g_1, \ldots, g_s)$, g_i guztiak homogeneoak izanik. Orduan, existitzen dira $q_1, \ldots, q_s$ polinomioak, non $f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s$ baita. Azter dezagun azken konbinazio horren osagai homogeneoak nolakoak diren. Horretarako, deskonposatu $q_i = \sum_{j \geq 0} q_{i,j}$ osagai homogeneotan $i = 1, \ldots, s$ guztietarako. Orduan,

$$f = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j \geq 0} q_{i,j} g_i \tag{4.2}$$

dugu eta, $q_{i,j}$ eta g_i homogeneoak izateagatik, $q_{i,j} g_i$ batugai guztiak ere homogeneoak dira. Beraz, (4.2) berdintza ikusita, f-ren osagai homogeneo bakoitza $q_{i,j} g_i$ horietariko batzuen batura da eta, bereziki, $\mathfrak{a}$ idealean dago. Horrela, (ii) frogaturik gelditzen da.

(ii)⇒(i). Izan bedi $\mathfrak{a} = (h_1, \ldots, h_s)$. Deskonposa dezagun h_i polinomio bakoitza osagai homogeneotan:

$$h_i = \sum_{j \geq 0} h_{i,j}.$$

Izan bedi $\mathfrak{b} = (h_{i,j} \mid 1 \leq i \leq s,\ j \geq 0)$. Ikusten badugu $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ dela, frogaturik geldituko da $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa dela. Alde batetik, nabaria da $h_i \in \mathfrak{b}$ dela $i = 1, \ldots, s$ guztietarako eta, hortaz, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ lortzen dugu. Bestetik, $h_i \in \mathfrak{a}$ dugu eta, (ii) propietatea betetzen denez, $h_{i,j}$ osagai homogeneo bakoitza ere $\mathfrak{a}$-n dago. Horrek alderantzizko partekotasuna frogatzen du. □

Ideal homogeneoek portaera berezia dute idealen arteko eragiketei dagokienez.

4.12. Teorema. (i) *Ideal homogeneoen batura, biderkadura eta ebakidura homogeneoak dira.*

(ii) $\mathfrak{a}$ *ideal homogeneoa bada, orduan* $\operatorname{rad}\mathfrak{a}$ *ere homogeneoa da.*

(iii) $\mathfrak{a}$ *ideal homogeneoa bada, orduan* $\mathfrak{a}$ *ideal erradikala dela frogatzeko, nahikoa da ondorengo propietatea egiaztatzea:*

$$\left.\begin{array}{r} f^r \in \mathfrak{a} \\ f \ \textit{homogeneoa} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in \mathfrak{a}.$$

(iv) $\mathfrak{p}$ *ideal homogeneo propioa bada, orduan* $\mathfrak{p}$ *ideal lehena dela frogatzeko, nahikoa da ondorengo propietatea egiaztatzea:*

$$\left.\begin{array}{r} fg \in \mathfrak{p} \\ f \ \textit{eta} \ g \ \textit{homogeneoak} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in \mathfrak{p} \ \textit{edo} \ g \in \mathfrak{p}.$$

FROGA. (i) Izan bitez $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ eta $\mathfrak{b} = (g_1, \ldots, g_s)$ ideal homogeneoak, agertzen diren sortzaileak homogeneoak izanik. Orduan,

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s) \quad \text{eta} \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} = (f_i g_j \mid i = 1, \ldots, r; \ j = 1, \ldots, s)$$

polinomio homogeneoen bidez sor daitezke eta, beraz, ideal homogeneoak dira. Ebakiduraren kasuan, aurreko teoreman oinarrituko gara. Izan bedi $f \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ eta idatz dezagun $f = \sum_{i \geq 0} f_i$, osagai homogeneotan deskonposaturik. Orduan, $f \in \mathfrak{a}$ denez eta $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa denez, $f_i \in \mathfrak{a}$ dugu i guztietarako. Gauza bera $\mathfrak{b}$ idealarekin egin dezakegunez, azkenean $f_i \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ dugu i guztietarako. Horrela, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ideal homogeneoa dela frogaturik gelditzen da.

(ii) Honetarako ere aurreko teorema erabiliko dugu: $f \in \operatorname{rad}\mathfrak{a}$ edozein izanik, bere osagai homogeneoak ere $\operatorname{rad}\mathfrak{a}$-n daudela ikusiko dugu. Jakina, $f \neq 0$ har dezakegu. Deskonposatu $f = f_k + f_{k+1} + \cdots + f_\ell$ osagai homogeneotan, $f_k \neq 0$ izanik. (Horrek esan nahi du $f_0, \ldots, f_{k-1}$ osagaiak nuluak direla.) Lortzen badugu frogatzea $f_k \in \operatorname{rad}\mathfrak{a}$ dela, orduan $f - f_k \in \operatorname{rad}\mathfrak{a}$ dugu eta kendura horretan f-n baino osagai homogeneo ez-nulu gutxiago ditugu. Horrela, osagai ez-nuluen kopuruaren gaineko indukzioaren bidez, f-ren osagai homogeneo guztiak $\operatorname{rad}\mathfrak{a}$-n daudela lortuko dugu.

Ikus dezagun, bada, $f_k \in \operatorname{rad}\mathfrak{a}$ dela. Hipotesia $f \in \operatorname{rad}\mathfrak{a}$ da. Beraz, existitzen da $r \geq 1$, non $f^r \in \mathfrak{a}$ baita. Orain,

$$f^r = (f_k + f_{k+1} + \cdots + f_\ell)^r = f_k^r + g$$

idatz dezakegu, f_k^r berretura kr mailako homogeneoa izanik eta g polinomioaren osagai homogeneo guztien maila kr baino handiagoa izanik. Horrek esan nahi du f_k^r f^r-ren osagai homogeneo bat dela. Kontuan izanik $\mathfrak{a}$ homogeneoa dela eta $f^r \in \mathfrak{a}$ dela, $f_k^r \in \mathfrak{a}$ ondorioztatzen dugu. Beraz, $f_k \in \operatorname{rad}\mathfrak{a}$ dugu, nahi bezala.

(iii) Frogatzeko $\mathfrak{p}$ ideal lehena dela, har dezagun $f, g \in \mathfrak{p}$ bi edozein polinomio eta ikus dezagun $f \in \mathfrak{p}$ edo $g \in \mathfrak{p}$ dela. Idatzi $f = f_k + f_{k+1} + \cdots + f_\ell$ eta $g = g_r + g_{r+1} + \cdots + g_s$ osagai homogeneotan deskonposaturik, $f_k \neq 0$ eta $g_r \neq 0$ izanik. Emaitza frogatzeko, deskonposizio horietan agertzen diren osagai ez-nuluen kopuruaren gaineko indukzioa erabiliko dugu.

Indukzioaren oinarria da f-k eta g-k osagai bakar bana dutenean. Kasu horretan, zuzenean lortzen dugu $f \in \mathfrak{p}$ edo $g \in \mathfrak{p}$ dela, hipotesia aplikatuz.

Azter dezagun orain kasu orokorra. Biderkatzen baditugu f-ren eta g-ren osagai homogeneoetako adierazpenak, orduan

$$fg = (f_k + f_{k+1} + \cdots + f_\ell)(g_r + g_{r+1} + \cdots + g_s) = f_k g_r + h$$

lortzen dugu, $f_k g_r$ biderkadura $k+r$ mailako homogeneoa izanik eta h polinomioaren osagai homogeneo guztien maila $k+r$ baino handiagoa izanik. Horrek esan nahi du $f_k g_r$ fg-ren osagai homogeneo bat dela. Kontuan izanik $\mathfrak{p}$ homogeneoa dela eta $fg \in \mathfrak{p}$ dela, $f_k g_r \in \mathfrak{p}$ ondorioztatzen dugu. Hipotesiaren arabera, hemendik $f_k \in \mathfrak{p}$ edo $g_r \in \mathfrak{p}$ lortzen dugu. Orokortasuna galdu gabe, $f_k \in \mathfrak{p}$ dela pentsa dezakegu, f-ren eta g-ren rol simetrikoagatik. Orduan,

$$(f - f_k)g = fg - f_k g \in \mathfrak{p}$$

dugu eta $(f - f_k)g$-ko faktoreek fg-koek baino osagai homogeneo ez-nulu bat gutxiago dute. Indukzio-hipotesia aplikatuz, $f - f_k \in \mathfrak{p}$ edo $g \in \mathfrak{p}$ lortzen dugu. Bigarren kasua izanez gero, bukatu dugu froga. Lehenengo kasuan, $f = (f - f_k) + f_k \in \mathfrak{p}$ dugu, eta horrela ere bilatzen genuen emaitza lortzen dugu. □

Atal honekin bukatzeko, ikus dezagun zero proiektiboei buruz hitz egin ahal izatea polinomio homogeneoen berezko propietatea dela, gorputza aljebraikoki itxia den kasuan.

4.13. Teorema. *Izan bedi K* aljebraikoki itxia*, eta demagun zentzua duela $f \in K[X_0, \dots, X_n]$ polinomioaren zero proiektiboei buruz hitz egiteak. Orduan, f homogeneoa da.*

Froga. Deskonposatu f osagai homogeneotan: $f = f_0 + \cdots + f_\ell$. Lehenengo eta behin, honako baliokidetasun hau betetzen dela frogatuko dugu:

$$f(a_0, \dots, a_n) = 0 \iff f_0(a_0, \dots, a_n) = \cdots = f_\ell(a_0, \dots, a_n) = 0. \tag{4.3}$$

Nabaria da bakarrik ikusi behar dugula eskuinalderako inplikazioa. Horretarako, bi kasu bereiziko ditugu.

(i) $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$.

Orduan, $f(0, \dots, 0) = 0$ baldintzapean lan egiten ari gara. Horrek esan nahi du f_0 osagai homogeneoa 0 dela. Bereziki, $f_0(0, \dots, 0) = 0$ dugu. Beste alde batetik, f-ren gainontzeko osagai homogeneoek ez dute gai askerik eta, hortaz, $f_1(0, \dots, 0) = \cdots = f_\ell(0, \dots, 0) = 0$.

(ii) $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Orduan, $(a_0 : \cdots : a_n)$ puntua har dezakegu $\mathbb{P}^n$ espazio proiektiboan. Orain, $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ denez eta zentzua duenez f-ren zero proiektiboei buruz hitz egiteak, f polinomioa $(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$ motako puntu guztietan ere anulatuko da, $\lambda \in K^\times$ izanik. Ondorioz,

$$\begin{aligned} 0 = f(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) &= f_0(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) + f_1(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) + \cdots + f_\ell(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) \\ &= f_0(a_0, \dots, a_n) + \lambda\, f_1(a_0, \dots, a_n) + \cdots + \lambda^\ell f_\ell(a_0, \dots, a_n) \end{aligned} \tag{4.4}$$

dugu $\lambda \in K^\times$ guztietarako, 4.7 teorema erabiliz. Orain, defini dezagun ondorengo polinomioa T indeterminatu berriarekiko:

$$g(T) = f_0(a_0, \ldots, a_n) + f_1(a_0, \ldots, a_n)\, T + \cdots + f_\ell(a_0, \ldots, a_n)\, T^\ell.$$

Ohartu, (4.4) berdintzaren arabera, g polinomioa $K^\times$ osoaren gainean anulatzen dela. Orduan, 2.5 ariketaren (ii) atala erabiliz, $g(T) = 0$ ondorioztatzen dugu, K infinitua dela kontuan izanik. Beraz, g-ren koefiziente guztiak 0 dira, hau da,

$$f_0(a_0, \ldots, a_n) = f_1(a_0, \ldots, a_n) = \cdots = f_\ell(a_0, \ldots, a_n) = 0,$$

nahi bezala.

Horrenbestez, (4.3) baliokidetasuna frogaturik gelditzen da. Ohartu beste modu honetan jar daitekeela, V eragilea erabiliz: $V(f) = V(f_0, \ldots, f_\ell)$. Orain, I aplikatuz eta Nullstellensatza erabiliz (hemen K aljebraikoki itxia izatea behar dugu), $\mathrm{rad}(f) = \mathrm{rad}(f_0, \ldots, f_\ell)$ dugu. Azken ideala homogeneoa da 4.12 teoremaren arabera eta, beraz, $\mathrm{rad}(f)$ ere homogeneoa da.

Beste alde batetik, $f = p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$ idazten badugu, p_i guztiak irreduzibleak eta desberdinak izanik, orduan badakigu $\mathrm{rad}(f) = (p_1 \ldots p_r)$ dela. (Gogoan izan 1.1 ariketaren (iii) atala.) Ideal hori homogeneoa eta nagusia denez, $p_1 \ldots p_r$ biderkadura polinomio homogeneoa dela ondorioztatzen dugu, 4.10 proposizioaren arabera. Orain, 4.8 teorema erabiliz, $p_1, \ldots, p_r$ polinomioak homogeneoak dira eta, hortik, $f = p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$ ere homogeneoa da, nahi bezala. $\square$

K ez bada aljebraikoki itxia, teorema hori ez da egiazkoa. Adibidez, $K = \mathbb{R}$ bada, orduan zentzua du $f(X,Y) = X^2 + Y^2 + 1$ polinomioaren zero proiektiboei buruz hitz egiteak ($\mathbb{P}^1$ zuzen proiektiboan), f-ren balio guztiak 0ren desberdinak baitira. Hala ere, f ez da homogeneoa.

4.3. Multzo aljebraiko proiektiboak eta Nullstellensatz proiektiboa

Atal honetan, multzo aljebraiko proiektiboen teoria garatzen dugu, 2. gaian kasu afinean egin genuen modura. Ikusiko dugunez, $\mathbb{P}^n$-ko multzo aljebraikoen propietateak frogatzeak ez du hainbeste lanik eskatuko. Izan ere, $\mathbb{P}^n$-k $\mathbb{A}^{n+1}$-ekin duen lotura erabiliko dugu horretarako, $\mathbb{A}^{n+1}$-en dagoeneko lortu ditugun emaitzez baliatuz. Has gaitezen multzo aljebraikoaren definizioarekin. Dakigunez, zero proiektiboei buruz hitz egiteko, polinomio homogeneoak baino ezin ditugu erabili. Hori da definizio honetan egiten dugun murrizketaren arrazoia.

4.14. Definizioa. Izan bedi $S \subseteq K[X_0, \ldots, X_n]$. Orduan, *$S$-ren zero proiektiboen multzoa* honela definitzen dugu,

$$V_+(S) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0,\ f \in S \textit{ homogeneo} \text{ guztietarako}\},$$

eta *multzo aljebraiko proiektibo* bat dela diogu.

4.15. Notazioa. Izan bedi $S \subseteq K[X_0, \ldots, X_n]$. Orduan, S-ko polinomioen zeroei begiratzerakoan bi aukera daude: $\mathbb{A}^{n+1}$-eko zero afinak edo $\mathbb{P}^n$-ko zero proiektiboak. Ohartu nola desberdintzen ditugun bi multzo horiek notazioaren bidez: $V(S)$ S-ren zero afinak dira eta $V_+(S)$, berriz, S-ren zero proiektiboak.

Erraz frogatzen da honako propietate hau.

4.16. Teorema. *Izan bedi $S \subseteq K[X_0, \ldots, X_n]$. Orduan, $V_+(S) = V_+(\mathfrak{a})$ dugu, $\mathfrak{a} = (f \in S \mid f$ homogeneoa$)$ izanik. (Bereziki, $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa da.)*

Horregatik, normalean V_+ ideal homogeneoei aplikaturik agertuko da. Hurrengo pausoa I eragilearen ordezkoa sartzea da.

4.17. Definizioa. Izan bedi $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. Orduan, *Y-ren ideala* honela definitzen dugu:

$$I_+(Y) = (f \in K[X_0, \ldots, X_n] \mid f \text{ homogeneoa eta } f(P) = 0,\ P \in Y \text{ guztietarako}).$$

Ohartu propietate hau betetzen dela: $f \in K[X_0, \ldots, X_n]$ polinomio homogeneoa bada, orduan $f \in I_+(Y)$ dugu baldin eta soilik baldin f Y-ko puntu guztietan anulatzen bada. (Berehala ondorioztatzen da $I_+(Y)$-ren definiziotik.)

Kasu afinean bezala, ondorengo emaitza hau dugu.

4.18. Teorema. *Izan bedi $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. Orduan, $I_+(Y)$ ideal erradikal homogeneoa da.*

FROGA. Izan bedi $\mathfrak{a} = I_+(Y)$. Definizioari begiratuz, garbi dago $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa dela. Ideal hau erradikala dela frogatzeko, 4.12 teoremaren arabera, nahikoa da inplikazio hau ikustea: $f^r \in \mathfrak{a}$ bada, f homogeneoa izanik, orduan $f \in \mathfrak{a}$ dela. Aurretik egindako oharragatik, f^r polinomio homogeneoa $\mathfrak{a}$-n badago, orduan f^r Y-ko puntu guztietan anulatzen da. Beraz, f ere Y-ren gainean anulatzen da eta $f \in \mathfrak{a}$ dugu, nahi bezala. $\square$

Ondoren zerrendatzen ditugun emaitzak kasu afinean ikusitakoen antzekoak dira eta modu bertsuan frogatzen dira. Hori dela eta, frogarik gabe emango ditugu.

4.19. Teorema. *V_+ eta I_+ eragileek honako propietate hauek dituzte:*

(i) *Partekotasunak aldatzen dituzte.*
(ii) *$S \subseteq K[X_0, \ldots, X_n]$ bada, orduan $V_+(I_+(V_+(S))) = V_+(S)$ dugu.*
(iii) *$Y \subseteq \mathbb{P}^n$ bada, orduan $I_+(V_+(I_+(Y))) = I_+(Y)$ dugu.*

4.20. Teorema. *Multzo aljebraiko proiektiboen bildura finituak eta ebakidura orokorrak aljebraikoak dira berriro ere.*

Multzo hutsa eta $\mathbb{P}^n$ espazio osoa ere multzo aljebraikoak direnez, *Zariskiren topologia* espazio proiektiboan ere defini dezakegu.

4.21. Teorema. *Izan bedi $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. Orduan, $V_+(I_+(Y)) = \overline{Y}$ dugu eta, bereziki, Y aljebraikoa bada, $V_+(I_+(Y)) = Y$.*

Kasu afinarekin dagoen paralelismoa ikusita, logikoa dirudi galdera hau egiteak: K gorputza aljebraikoki itxia bada eta $\mathfrak{a}$ ideal erradikal homogeneoa bada, betetzen da $I_+(V_+(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$? Bestela esanda, onartzen du Nullstellensatzak “itzulpen” zuzen bat testuinguru proiektibora? Jarri dugun bezala, galdera horrek ezezko erantzuna du. Izan ere, hartu $\mathfrak{a} = (X_0, \dots, X_n)$ ideal erradikal homogeneoa. Orduan, $V_+(\mathfrak{a}) = \varnothing$ dugu, $(0 : \cdots : 0)$ puntua ez baita existitzen espazio proiektiboan. Hortaz, $I_+(V_+(\mathfrak{a})) = I_+(\varnothing) = K[X_0, \dots, X_n] \neq \mathfrak{a}$ dugu. Hala ere, ikusiko dugunez, hori da eman daitekeen kontradibide bakarra eta, horregatik, erraz konponduko dugu Nullstellensatz proiektiboaren enuntziatua.

Nullstellensatz proiektiboa frogatzeko bertsio afinean oinarrituko gara. Gakoa da V_+ eragile proiektiboa V eragile afinarekin lotzea eta, era berean, I_+ I-rekin. Hemen, kasu afina $\mathbb{A}^{n+1}$ espazioarekin egingo dugu, azken batean $\mathbb{P}^n$-ren definizioa $\mathbb{A}^{n+1}$ espazioan oinarrituta baitago. Nahi dugun lotura hori lortzeko, funtsezkoa da jarraian definitzen dugun kontzeptua.

4.22. Definizioa. Izan bedi $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, hau da, $\mathbb{A}^{n+1}$-eko zuzen bektorialen multzo bat. Orduan, Y-ren *konoa*, $C(Y)$ ikurraz adierazten duguna, $\mathbb{A}^{n+1}$-en azpimultzo bat da, honela definiturik:

(i) $Y \neq \varnothing$ bada, orduan $C(Y)$ konoa Y osatzen duten zuzen bektorialen bildura da.
(ii) $Y = \varnothing$ bada, orduan $C(Y) = \{(0, \dots, 0)\}$.

Beraz, edozein kasutan, $C(Y)$ konoko puntuak honela gelditzen dira karakterizaturik:

$$(a_0, \dots, a_n) \in C(Y) \iff (a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0) \text{ edo } (a_0 : \cdots : a_n) \in Y.$$

4.23. Lema. *Izan bedi $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \dots, X_n]$-ren ideal homogeneo propioa. Orduan, $\mathfrak{a} \subseteq (X_0, \dots, X_n)$ dugu. Bereziki, $K[X_0, \dots, X_n]$-ren ideal maximalen artean, $(X_0, \dots, X_n)$ da homogeneoa den bakarra.*

FROGA. Absurdora eramanez, demagun $\mathfrak{a}$ ez dagoela $(X_0, \dots, X_n)$ idealaren barruan. Kontuan izanik $(X_0, \dots, X_n)$ gai askerik gabeko polinomioek osatzen dutela, ondorioztatzen dugu $f \in \mathfrak{a}$ polinomioren batek gai aske ez-nulua duela. Beraz, $f = f_0 + \cdots + f_\ell$ osagai homogeneotan deskonposatzen badugu, $f_0 \neq 0$ dugu. Orain, 4.11 teoremaren arabera, $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa izateagatik, $f \in \mathfrak{a}$ polinomioaren osagai homogeneo guztiak $\mathfrak{a}$-n daude. Bereziki, $f_0 \neq 0$ konstantea $\mathfrak{a}$-n dago eta, ondorioz, $\mathfrak{a} = K[X_0, \dots, X_n]$ kontraesana lortzen dugu. □

Lehenengo eta behin, V-ren eta V_+-en arteko lotura argituko dugu. Aurretik esan dugun bezala, $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \dots, X_n]$-ren ideala bada, orduan $V(\mathfrak{a})$ $\mathfrak{a}$-ren zeroak dira $\mathbb{A}^{n+1}$ espazio afinean eta $V_+(\mathfrak{a})$, berriz, $\mathfrak{a}$-ren zeroak $\mathbb{P}^n$ espazio proiektiboan.

Hurrengo teoremaren arabera, $\mathfrak{a}$ ideal homogeneo propioa bada, zero afinak zero proiektiboen konoa baino ez dira.

4.24. Teorema. *Izan bedi* $\mathfrak{a}$ $K[X_0, \dots, X_n]$*-ren ideal homogeneo* propioa*. Orduan,* $V(\mathfrak{a}) = C(V_+(\mathfrak{a}))$ *dugu.*

FROGA. Baliokidetasun hau frogatu behar dugu:

$$(a_0, \dots, a_n) \in V(\mathfrak{a}) \iff (a_0, \dots, a_n) \in C(V_+(\mathfrak{a})). \tag{4.5}$$

Bi kasu hauek bereiziko ditugu:

(i) $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$.

Orduan, konoaren definizioaren arabera, $(0, \dots, 0) \in C(V_+(\mathfrak{a}))$ dugu. Beste alde batetik, $\mathfrak{a}$ ideal homogeneo propioa izateagatik, $\mathfrak{a} \subseteq (X_0, \dots, X_n)$ dugu aurreko lemaren arabera. Ondorioz, $V(X_0, \dots, X_n) \subseteq V(\mathfrak{a})$ lortzen dugu, hau da, $(0, \dots, 0) \in V(\mathfrak{a})$. Beraz, kasu honetan (4.5) baliokidetasuna bete egiten da.

(ii) $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Alde batetik, $(a_0, \dots, a_n) \in V(\mathfrak{a})$ dugu baldin eta soilik baldin $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ bada $f \in \mathfrak{a}$ guztietarako. Beste alde batetik, $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ izateagatik, $(a_0, \dots, a_n) \in C(V_+(\mathfrak{a}))$ dugu baldin eta soilik baldin $(a_0 : \cdots : a_n) \in V_+(\mathfrak{a})$ bada eta, V_+ eragilearen definizioagatik, horren esanahia da $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ dela $f \in \mathfrak{a}$ homogeneo guztietarako.

Beraz, (4.5) baliokidetasuna egiaztatzeko, honako baldintza hau ziurtatu behar dugu: $\mathfrak{a}$-ko polinomio homogeneoak puntu afin batean anulatzen badira, orduan $\mathfrak{a}$-ko polinomio guztiak anulatzen direla puntu horretan. Hori garbi dago, zeren eta $\mathfrak{a}$ ideal homogeneoa izateagatik, $\mathfrak{a}$-ko polinomio guztiak sortzaile homogeneoen multiploen baturak baitira. □

Aurreko teorema ez da egia $\mathfrak{a}$ ideala ez bada propioa. Izan ere, $V(K[X_0, \dots, X_n]) = \varnothing$ eta $C(V_+(K[X_0, \dots, X_n])) = C(\varnothing) = \{(0, \dots, 0)\}$ desberdinak dira.

Bigarrenik, I-ren eta I_+-en arteko erlazioa zehazten dugu.

4.25. Teorema. *Izan bedi* K *gorputz* infinitua *eta demagun* $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ ez-hutsa *dela. Orduan* $I_+(Y) = I(C(Y))$*.*

FROGA. $\subseteq$) Har dezagun $I_+(Y)$-ren definizioan agertzen diren sortzaileetako bat, hau da, Y-ko puntu guztien gainean anulatzen den $f \in K[X_0, \dots, X_n]$ polinomio homogeneo bat. Frogatzen badugu $f \in I(C(Y))$ dela, orduan nahi dugun partekotasuna ondorioztatuko dugu. Beraz, f polinomioa $(a_0, \dots, a_n) \in C(Y)$ puntu guztien gainean anulatzen dela ikusi behar dugu. Bi kasu bereiziko ditugu:

(i) $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$.

Ohartu f ez dela konstante ez-nulua, Y-ko puntu guztien gainean anulatzen baita eta $Y \neq \varnothing$ baita. Orduan, f homogeneoa denez, f-k ez duela gai askerik ondorioztatzen dugu. Beraz, f polinomioa $(0,\dots,0)$ puntuan anulatzen da, nahi bezala.

(ii) $(a_0,\dots,a_n) \neq (0,\dots,0)$.

Orduan, $(a_0 : \cdots : a_n) \in Y$ dugu eta, $f \in I_+(Y)$ denez, $f(a_0,\dots,a_n) = 0$ ondorioztatzen dugu.

$\supseteq$) Izan bedi $g \in I(C(Y))$. Ikusteko $g \in I_+(Y)$ dela, nahikoa da g-ren osagai homogeneoak, dei diezaiegun $g_0,\dots,g_\ell$, $I_+(Y)$-n daudela frogatzea. Horretarako, polinomio horiek homogeneoak direnez,

$$g_0(a_0,\dots,a_n) = \cdots = g_\ell(a_0,\dots,a_n) = 0 \tag{4.6}$$

dela ziurtatu behar dugu $(a_0 : \cdots : a_n) \in Y$ guztietarako. Kontuan izan, $g \in I(C(Y))$ izateagatik, $g(a_0,\dots,a_n) = 0$ betetzen dela. Baldintza horretatik (4.6) ondorioztatzeko, nahikoa da 4.13 teoremaren frogan bezala argudiatzea, (4.3) baliokidetasuna lortu nahian genbiltzanean. Puntu horretan, funtsezkoa da K gorputza infinitua izateko hipotesia. $\square$

Ohartu teorema hori ez dela betetzen $Y = \varnothing$ bada. Izan ere, $I_+(\varnothing) = K[X_0,\dots,X_n]$ eta $I(C(\varnothing)) = I(\{(0,\dots,0)\}) = (X_0,\dots,X_n)$ desberdinak dira.

4.26. Teorema (Nullstellensatz proiektiboa)**.** *Izan bedi K gorputz* aljebraikoki itxia *eta demagun $\mathfrak{a}$ $K[X_0,\dots,X_n]$-ren ideal erradikal homogeneoa dela, $\mathfrak{a} \neq (X_0,\dots,X_n)$ izanik. Orduan, $I_+(V_+(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ dugu.*

Froga. Lehenengo eta behin, ohartu

$$I_+(V_+(K[X_0,\dots,X_n])) = I_+(\varnothing) = K[X_0,\dots,X_n]$$

dela. Demagun orain $\mathfrak{a}$ ideal propioa dela. Hasteko, ikus dezagun $V_+(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$ dela. Bestela balitz, orduan $C(V_+(\mathfrak{a})) = \{(0,\dots,0)\}$ dugu eta, 4.24 teorema erabiliz, $V(\mathfrak{a}) = \{(0,\dots,0)\}$ ere bai. Orain, Nullstellensatz afina aplikatuz, $\mathfrak{a} = I(\{(0,\dots,0)\}) = (X_0,\dots,X_n)$ lortzen dugu, kontraesan bat dena.

Orain, $V_+(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$ denez, 4.25 teorema aplikatzeko moduan gaude eta, beraz,

$$I_+(V_+(\mathfrak{a})) = I(C(V_+(\mathfrak{a}))) = I(V(\mathfrak{a})) = \operatorname{rad}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

lortzen dugu, nahi bezala, berriro ere Nullstellensatz afina kontuan hartuz. $\square$

4.27. Korolarioa. *Izan bitez K gorputz* aljebraikoki itxia *eta $\mathfrak{a}$ $K[X_0,\dots,X_n]$-ren ideal homogeneoa. Orduan,* $\operatorname{rad}\mathfrak{a} \neq (X_0,\dots,X_n)$ *bada,*

$$I_+(V_+(\mathfrak{a})) = \operatorname{rad}\mathfrak{a}$$

dugu.

Froga. Ideal erradikalaren definizioan oinarrituz, erraz ikusten da $V_+(\operatorname{rad}\mathfrak{a}) = V_+(\mathfrak{a})$ dugula. Bestalde, $\mathfrak{a}$ homogeneoa izateagatik, $\operatorname{rad}\mathfrak{a}$ ere homogeneoa da. Orduan, Nullstellensatz proiektiboa aplikatuz,

$$I_+(V_+(\mathfrak{a})) = I_+(V_+(\operatorname{rad}\mathfrak{a})) = \operatorname{rad}\mathfrak{a}.$$

□

Zein dira aurreko korolariotik kanpo gelditzen diren ideal homogeneoak? Hau da, zein dira $\operatorname{rad}\mathfrak{a} = (X_0, \dots, X_n)$ betetzen duten ideal homogeneoak? Alde batetik, $\mathfrak{a} \subseteq (X_0, \dots, X_n)$ izan behar dugu. Bestetik, $i = 0, \dots, n$ bakoitzeko, r_i berretzaileren baterako $X_i^{r_i} \in \mathfrak{a}$ izan behar dugu eta, hortaz, $(X_0^{r_0}, \dots, X_n^{r_n}) \subseteq \mathfrak{a}$ bete behar da. Alderantziz, $\mathfrak{a}$ idealak $(X_0^{r_0}, \dots, X_n^{r_n}) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq (X_0, \dots, X_n)$ betetzen badu, orduan $\operatorname{rad}\mathfrak{a} = (X_0, \dots, X_n)$ izango dugu. Horrela, zehazturik gelditzen dira nahi genituen idealak.

4.28. Teorema ($I_+ - V_+$ korrespondentzia)**.** *Izan bedi K gorputz* aljebraikoki itxia. *Orduan, I_+ eta V_+ eragileek bijekzio bat eratzen dute $\mathbb{P}^n$-ren multzo aljebraikoen eta $K[X_0, \dots, X_n]$-ren ideal erradikal homogeneoen artean, behin $(X_0, \dots, X_n)$ baztertuta. Ideal horri* ideal baztergarri *deitzen zaio.*

Froga. Aurretik ikusi dugu $V_+(I_+(Y)) = Y$ dela $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ multzo aljebraikoa bada. Bestetik, Nullstellensatz proiektiboaren arabera, $I_+(V_+(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ dugu $\mathfrak{a} \neq (X_0, \dots, X_n)$ ideal erradikal homogeneoa bada. Beraz, V_+ eta I_+ elkarren alderantzizkoak dira teoremaren enuntziatuan aipatzen diren multzoen artean, eta bijekzio bat eratzen dute. □

Bukatzeko, ikus dezagun, $I - V$ korrespondentzia afinarekin bezala, $I_+ - V_+$ korrespondentziaren bitartez ideal lehenak barietateekin elkartuta daudela. Horren arrazoia hurrengo teorema da, kasu afinean bezala froga daitekeena. Lehenengo, barietatearen definizioa emango dugu.

4.29. Definizioa. Izan bedi V multzo aljebraiko proiektibo ez-hutsa. Orduan, V *barietatea* dela diogu ezin bada deskonposatu bi multzo aljebraiko proiektibo txikiagoren bildura gisa.

4.30. Teorema. *Izan bedi V multzo aljebraiko proiektiboa. Orduan, V barietatea da baldin eta soilik baldin $I_+(V)$ ideal lehena bada.*

Froga. Alde batetik, $I_+(V)$ ideal lehena bada, V barietatea dela ikusteko hitzez hitz kopia dezakegu kasu afineko froga. Alderantzizko inplikaziorako, demagun V barietatea dela. Orduan, $I_+(V)$ ideal homogeneoa denez, lehena dela frogatzeko nahikoa da hau betetzen dela ikustea, 4.12 teoremaren arabera:

$$\left.\begin{array}{r} fg \in I_+(V) \\ f \text{ eta } g \text{ homogeneoak} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in I_+(V) \text{ edo } g \in I_+(V).$$

Horren froga kasu afinean bezala argudiatuz lor daiteke. □

4.31. Korolarioa. *$I_+ - V_+$ korrespondentziaren bitartez, barietateak ideal lehen homogeneoekin elkartuta daude.*

Ez da egia $I_+ - V_+$ korrespondentziaren bitartez puntuak ideal maximal homogeneoekin lotuta daudenik. Izan ere, 4.23 teoremaren arabera, ideal maximal homogeneo bakarra $(X_0, \dots, X_n)$ ideal baztergarria da. Beraz, $I_+ - V_+$ korrespondentzian ez du ideal maximal bakar batek ere parte hartzen.

Kasu afinean bezala, multzo aljebraiko proiektibo baten osagai irreduzibleei buruz hitz egin dezakegu eta, erredundantziarik ez badago, osagai horiek bakarrak dira, ordena salbu.