```
--> load("distrib");
```

Probabilitate Banaketa diskretuak

1 Bernouilli-ren Banaketa

Banaketa diskretu askoren oinarria Bernouilli-ren banaketa da. Banaketa honet
banaketa binomiala, geometrikoa,Poisson-ena, hipergeometrikoa eta binomial ne
ditugu.

Bernouilliren banaketa erabiliko dugu, bi emaitza bakarreko saiakuntzetan.
Hau da, arrakasta (X=1) lortzen dugu p probabilitatearekin edo porrota (X=0)
Saiakuntza hauek dikotomikoak direla esango dugu.

1.1 Probabilitate funtzioa

f(x)=p(X=x) "pdf_bernoulli" aginduarekin lortuko dugu.

```
--> pdf_bernoulli(x,p);
```

Arrakastaren probabilitatea $p = 0.4$ denean, $X = 1$ eta $X = 0$ aldagaiaren ba
emaitzak lortuko ditugu:

```
--> pdf_bernoulli(1,0.4);
```

```
--> pdf_bernoulli(0,0.4);
```

1.2 Bernouilli-ren banaketaren neurriak

Bernouilli-ren banaketaren itxaropen matematikoa, bariantza eta desbiderapen
lortuko ditugu:

```
 -->  [mean_bernoulli(p),var_bernoulli(p),std_bernoulli(p)];
```

adibidez, p = 0.4 denean balio hauek lortuko ditugu:

```
 -->  [mean_bernoulli(0.4),var_bernoulli(0.4),std_bernoulli(0.4)];
```

Bernouilli-ren banaketaren asimetria koefizientea (skewness) eta zapaltasun k
agindu hauekin lortuko ditugu:

```
 -->  [skewness_bernoulli(p),kurtosis_bernoulli(p)];
```

```
 -->  [skewness_bernoulli(0.4),kurtosis_bernoulli(0.4)];
```

1.3 Zorizko balioak

Honako aginduarekin, p=0.4 duen, Bernouilli-ren banaketari jarraitzen dion al
10 balio lortzen ditugu.

```
 -->  random_bernoulli(0.4,10);
```

2 Banaketa binomiala

2.1 Zenbaki binomikoak (konbinatorioak)

Maxima includes function "binomial" to calculate the binomial coefficient:
Maximaren "binomial" funtzioaren bidez zenbaki konbinatorioen balioak lortuko

$$\text{binomial}(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

```
--> binomial(n,r);
```

```
--> binomial(10,3);
```

2.2 Probabilitate eta banaketa funtzioak

Bernouilli-ren saiakuntza, n aldiz errepikatzen denean eta X aldagaiak lortut
adierazten badu, X aldagaiak Banaketa binomialari jarraitzen diola esango d
Banaketaren parametroak, saiakuntza kopurua n eta arrakastaren probabilitatea
X~Bin(n,p).

x = 0, 1, 2, ..., n aldagaiaren balioentzat dentsitate funtzioa era honetan

```
--> f(x)=binomial(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x);
```

Dentsitate funtzioaren balioak lortzeko "pdf_binomial(x,n,p)" funtzioa erabil
Adibidez - X ~ Bin(n = 10, p = 0.3) denean
"pdf_binomial(3,10,0.3)" funtzioak P(X=3) = f(3) balioa lortuko du.

```
--> pdf_binomial(3,10,0.3);
```

```
--> n:10;p:0.3;x:3;
    pdf_binomial(x,n,p);
```

Banaketa funtzioaren balioak lortzeko "cdf_binomial(x,n,p)" funtzioa erabili
Adibidez, cdf_binomial(3,10,0.3) aginduak P(X<=3) = F(3) funtzioaren balioa l
X ~ Bin(10,0.3) denean.

```
--> cdf_binomial(3,10,0.3);
```

2.3 Banaketa binomialaren neurriak

X ~ Bin(n,p) Binomial aldagaiaren itxaropen matematikoa, bariantza eta desbi
hauek dira:

```
--> [%mu = n*p,%sigma^2=n*p*(1-p),%sigma=(n*p*(1-p))^ (0.5)];
```

X ~ Bin(10,0.3) banaketa binomialaren neurriak:

```
--> [mean_binomial(10,0.3),var_binomial(10,0.3),std_binomial(10,0.3)];
```

```
--> [skewness_binomial(10,0.3),kurtosis_binomial(10,0.3)];
```

2.4 Alderantzizko funtzioa

Banaketa funtzioaren alderantzizkoa lortzeko "quantile_binomial(r,n,p)"
funtzioa erabiliko dugu. r =P(X<=x)=F(x) izanik, emaitza x balioa izango da.
Lortuko dugun X-en balioa, F(x)=P(X<=x) funtzioak r-en gertuen duen aldagaiar
Adibidez, X ~ Bin(10,0.3) denean F(x) = 0.95 zer nolako X-rekin lortzen dugu
F(5) = 0.95265 denez, x = F^(-1)(0.95) = 5 lortuko dugu.

```
--> [cdf_binomial(5,10,0.3),quantile_binomial(0.95,10,0.3)];
```

probabilitatea = 0.96 sartzen badugu "quantile_binomial(0.96,10,0.3)", lortu
emaitza 6 izango da.

```
--> quantile_binomial(0.96,10,0.3);
```

2.5 Zorizko balioak

Honako aginduarekin, n=20, p=0.3 dituen, binomial banaketari jarraitzen dion
10 balio lortzen ditugu.

```
--> random_binomial(20,0.3,10);
```

3 Banaketa hipergeometrikoa

Demagun populazio finitu baten n1 elementu arrakasta bezala hartzen ditugula
n2 elementu porrota bezala. Populazioaren elementu kopurua guztira N=n1+n2
n (n< N) tamainako lagina hartuz, X zorizko aldagaiak laginan ditugun arrakas
kopurua adierazten duenean banaketa hipergeometrikari jarraitzen diola esango
X ~ H(n1,n2,n) eran adieraziko dugu.

3.1 Probabilitate eta banaketa funtzioak

Banaketa hipergeometrikoa, X ~ H(n1,n2,n), denean X aldagaiak har ditzaken
honetan daude max(0,n-n2) <= x <= min(n,n1), eta probabilitate funtzioak
adierazpen hau du:

```
--> f(x)=(binom(n1,x)*binom(n2,n-x))/binom(n1+n2,n);
```

Probabilitate funtzioaren balioa, p(X=x), lortzeko "pdf_hypergeometric(x,n1,n
agindua erabiliko dugu eta banaketa funtzioarena, p(X<=x), "cdf_hypergeometri
aginduarekin.
Adibidez,   n1 = 5, n2 = 20, n = 10, direnean

f(4) = P(X=4) lortzeko "pdf_hypergeometric(4,5,20,10)" erabiliko dugu eta
F(3) = P(X<=3) kalkulatzeko "cdf_hypergeometric(4,5,20,10)"

```
-->  pdf_hypergeometric(4,5,20,10);float(%);
```

```
-->  cdf_hypergeometric(4,5,20,10);float(%);
```

3.2 Banaketa hipergeometrikoaren neurriak

X ~ H(n1,n2,n) banaketa hipergeometrikoari jarraitzen dion aldagaiaren itxar
matematikoa, bariantza eta desbiderapen tipikoa hauek dira:

```
-->  [%mu=(n*n1)/(n1+n2),%sigma^2=n*(n1/(n1+n2))*(n2/(n1+n2))*((n1+n2-n)/(n1
```

X ~ H(5,20,10) kasuan emaitzak agindu hauekin lortuko ditugu.

```
-->  [mean_hypergeometric(5,15,10)];float(%);
```

```
-->  [var_hypergeometric(5,15,10),std_hypergeometric(5,15,10)];float(%);
```

```
-->  [skewness_hypergeometric(5,15,10),kurtosis_hypergeometric(5,15,10)];flo
```

3.3 Alderantzizko funtzioa

Banaketa funtzioaren alderantzizkoa lortzeko "quantile_hipergeometric(r,n1,n2
funtzioa erabiliko dugu. Emaitza r =P(X<=x)=F(x) betetzen duen x balioa izan
Lortuko dugun X-en balioa, F(x)=P(X<=x) funtzioak r-tik gertuen duen aldagaia
izango da. r=0.25 denean 1. koartila lortzen dugu, r=0.75 denean hirugarren
r aldatuz dogokion pertzentila.

```
-->  Q1 : quantile_hypergeometric(0.25,5,20,10);
```

```
-->  Q2 : quantile_hypergeometric(0.75,5,20,10);
```

```
-->  P : quantile_hypergeometric(0.9,5,15,10);
```

3.4 Zorizko balioak

Honako aginduarekin, X ~ H(10,15,10) banaketa hipergeometrikoari jarraitzen
20 balio lortzen ditugu.

```
-->  random_hypergeometric(10,15,10,20);
```

3.5 Banaketa hipergeometrikoaren beste definizioa

Banaketa hipergeometrikoa beste eran defini dezakegu. N elementu dituen popul
"arrakasta" diren R elementu ditugu (R<N). n tamainako lagina (n<N) hartzen
X aldagaiak laginan ditugun arrakasta kopurua da.   X aldagaia banaketa hipe
jarraitzen dio eta era honetan adiraziko dugu X ~ H(N,R,n).
Aldagaiak har ditzaken balioak max(0,R+n-N) <= x <= min(n,R) tartekoak dira e
funtzioa maxima programan era honetako funtzioa definitu behar dugu.

```
-->  f(x,N,R,n):=(binom(R,x)*binom(N-R,n-x))/binom(N,n);
```

```
-->  f(3,20,5,10);float(%);
```

4 Poisson-en Banaketa.

Poisson-en banaketa erabiliko dugu, zorizko aldaigai diskretuak, denbora unit
edo luzeera unitatearekiko (edo azalera, edo bolumena edo ...) gertaera bate
errepikapenen kopurua adierazten duenenean. Poisson-en banaketak parametro ba
X ~ Poisson(lambda) eran adieraziko dugu.

4.1 Probabilitate eta banaketa funtzioak

Probabilitate funtzioaren balioak x=0, 1, 2, 3, ... balioarentzak era honetan
kalkulatzen da:

```
--> f(x)=exp(-%lambda)*%lambda^x/x!;
```

Probabilitate eta banaketa funtzioen balioak lortzeko "pdf_poisson(x,lambda)"
"cdf_poisson(x,lambda)" aginduak erabiliko ditugu. Adibidez lambda = 6 denea
f(3) = P(X=3) lortzeko pdf_poisson(3,6) erabiliko dugu, eta F(3) = P(X<=3) k
cdf_poisson(3,6)

```
--> [pdf_poisson(3,6),cdf_poisson(3,6)];
```

```
--> float(%);
```

4.2 Poisson-en banaketaren neurriak

Poisson-en banaketaren itxaropen matematikoa eta bariantzak parametroaren bal
hartzen dute.

```
--> [%mu = %lambda, %sigma^2 = %lambda];
```

X ~ Poisson(2) banaketaren neurriak era honetan kalkulatuko dugu:

```
--> [mean_poisson(2),var_poisson(2),std_poisson(2)];
```

```
--> [skewness_poisson(2),kurtosis_poisson(2)];
```

4.3 Alderantzizko funtzioa

X ~ Poisson(2) banaketaren pertzentilak era honetan lortuko ditugu

```
--> [quantile_poisson(0.25,2),quantile_poisson(0.75,2)];
```

4.4 Zorizko balioak

Hurrengo aginduarekin, X ~ Poisson(2) banaketari jarraitzen dioten
10 zorizko balio lortzen ditugu

```
--> random_poisson(2,10);
```

5 Banaketa geometrikoa

Benouilli banaketari jarraitzen dion saiakuntza ditugu, eta saiakuntza errepi
lehenengo arrakasta lortu arte. Arrakasta hori lortu arte behar izan diren er
kopurua adierazten duen aldagaiak banaketa geometrikoari jarraitzen dio, X ~
Errepikapen kopurua azkenengo saiakuntza, arrakasta izan dena, ez da zenbatze

Probabilitate funtzioa

f(x) = P(X=x) = p*(1-p)^x, for x = 0, 1, 2, ...

5.1 Probabilitate eta banaketa funtzioak

Probabilitate ena banaketa funtzioaren balioak lortzeko. "pdf_geometric(x,p)
"cdf_geometric(x,p)" agindua erabiliko ditugu. Adibidez, X ~ geom(0.2) baldi

f(2) = P(X=2) lortzeko "pdf_geometric(x,0.2)" erabiliko dugu eta
F(2) = P(X<=2) lortzeko "cdf_geometric(2,0.2)".

```
--> pdf_geometric(2,0.2);
```

```
--> cdf_geometric(3,0.2);
```

5.2 Banaketa geometrikoaren neurriak

X ~ geom(p) aldagiaren itxaropen matematikoa eta bariantza:

```
--> [%mu = (1-p)/p, %sigma^2 = (1-p)/p^2];
```

X ~ geom(0.2) betetzen duen aldagaiaren neurriak agindu hauen bidez lortuko

```
--> [mean_geometric(0.2),var_geometric(0.2),std_geometric(0.2)];
```

```
--> [skewness_geometric(0.2),kurtosis_geometric(0.2)];
```

5.3 Alderantzizko funtzioa

X ~ geom(p) betetzen duen aldagaiaren pertzentilak lortzeko "quantile_geometr
agindua erabiliko dugu.
Adibidez x = F^(-1)(0.5) eta x = F^(-1)(0.6) lortzeko X ~ geom(0.2) denean

```
--> [quantile_geometric(0.5,0.2),quantile_geometric(0.6,0.2)];
```

5.4 Zorizko balioak

Hurrengo aginduarekin, X ~ geom(0.3) banaketari jarraitzen dioten
10 zorizko balio lortzen ditugu

```
--> random_geometric(0.3,10);
```

5.5 Banaketa geometrikoaren ordezko definizioa

Banaketa geometrikoa beste era baten ere definitua izan daiteke. Beste aukera
definizioan errepikapen kopurua zenbatzerakoan azkenengo errepikapena, arraka
dena, ere kontatzen dugu.

Banaketa era honetan definitzen badugu, porobabilitate funtzioa aldatu behar
eta honako hau da:

f(x) = P(X=x) = p*(1-p)^(x-1), for x = 1, 2, 3, ...

Bigarren aukeran honetan, X aldagaiak ezin du 0 balioa hartu.

Bigarren aukera hau maxima programan ez dago definituta, baina nahi izanez ge
funtzio berriak era honetan (O = ordezkoa):

```
--> pdf_geometric_O(x,p):=pdf_geometric(x-1,p);
```

```
--> cdf_geometric_O(x,p):=cdf_geometric(x-1,p);
```

Bi definizio hauen bidez, lortzen diren ez berdintasunak ikusteko adibide bat

```
--> [pdf_geometric_0(5,0.2),pdf_geometric(4,0.2)];
```

```
--> [pdf_geometric_0(5,0.2),pdf_geometric(5,0.2)];
```

```
--> [cdf_geometric_0(5,0.2),cdf_geometric(4,0.2)];
```

```
--> [cdf_geometric_0(5,0.2),cdf_geometric(5,0.2)];
```

```
--> [pdf_geometric_0(1,0.2),pdf_geometric(0,0.2)];
```

Definizioa ordezten badugu, itxaropen matematikoa, bariantza eta beste neurri
birkalkulatu behar dira.

	"distrib" paketean	ordezko definizioa
batezbestekoa:	(1-p)/p	1/p
bariantza:	(1-p)/p^2	(1-p)/p^2

6 Banaketa binomial negatiboa

Kasu honetan banaketa geometrikoan lehenengo arrakasta lortzen zenean genuene
errepikapenak bukatzen bagenuen ere, banaketa binomial negatiboan r arrakasta
errepikatzen dugu saiakuntza. X aldagaiak azkenengo arrakasta lortu arte
irten diren porroten kopurua adierazten du. X ~ BN(r,p) eran adieraziko dugu.

6.1 Probabilitate eta banaketa funtzioak

```
--> f(x)=binom(r+x-1,r-1)*p^r*(1-p)^x;
```

Probabilitate eta banaketa funtzioaren balioak lortzeko. "pdf_negative_binom
eta "cdf_negative_binomial(x,r,p)" aginduak erabiliko ditugu. Adibidez,
X ~ BN(2,0.3) baldin bada,
f(6) = P(X=6) lortzeko "pdf_negative_binomial(6,2,0.3)" eta
F(6) = P(X<=6) lortzeko "cdf_negative_binomial(6,2,0.3)" erabiliko ditugu.

```
--> pdf_negative_binomial(6,2,0.3);
```

```
--> cdf_negative_binomial(6,2,0.3);
```

6.2 Banaketa binomial negatiboaren neurriak

X ~ BN(r,p) aldagiaren itxaropen matematikoa eta bariantza:

```
--> [%mu = r*(1-p)/p, %sigma^2 = r*(1-p)/p^2];
```

X ~ BN(2,0.3) betetzen duen aldagaiaren neurriak agindu hauen bidez lortuko

```
--> [mean_negative_binomial(3,0.2)];
```

```
--> [var_negative_binomial(3,0.2),std_negative_binomial(3,0.2)];
```

```
--> [skewness_negative_binomial(3,0.2),kurtosis_negative_binomial(3,0.2)];
```

6.3 Alderantzizko funtzioa

X ~ BN(r,p) betetzen duen aldagaiaren pertzentilak lortzeko
"quantile_negative_binomial(pertzentila,r,p)
agindua erabiliko dugu. Adibidez x = F^(-1)(0.5) eta x = F^(-1)(0.6) lortzeko
X ~ BN(2,0.3) denean

```
--> P1 : quantile_negative_binomial(0.5,2,0.3);
```

```
--> P2 : quantile_negative_binomial(0.6,2,0.3);
```

6.4 Zorizko balioak

Hurrengo aginduarekin, X ~ BN(2,0.3) banaketari jarraitzen dioten 10 zorizko balio lortzen ditugu

```
--> random_negative_binomial(2,0.3,10);
```

6.5 Banaketa binomial diskretuaren ordezko definizio

Banaketa binomial negatiboa beste era baten ere definitua izan daiteke. Beste definizioan, saiakuntza kopurua zenbatuko diugu, azkenengo errepikapena, r. a dena, ere kontatzen dugu.

Banaketa era honetan definitzen badugu, porobabilitate funtzioa aldatu behar eta honako hau da:

```
--> f(x)=binom(x-1,r-1)*p^r*(1-p)^(x-r);
```

Ordezko definizio honentzat maxima programak ez du funtziorik, baina era hone defini ditzakegu (O = ordezkoa):

```
--> pdf_negative_binomial_O(x,r,p):=pdf_negative_binomial(x-r,r,p);
```

```
--> cdf_negative_binomial_O(x,r,p):=cdf_negative_binomial(x-r,r,p);
```

7 Banaketa uniformea

Probabilitate berdina duten n balio har ditzaken X aldagaiak probabilitate banaketa uniformeari jarraitzen dio. Probabilitate funtzioa honako hau da:

f(x) = 1/n, x = 1,2, ..., n izanik

X ~ U(n) eran adieraziko dugu.

"pdf_discrete_uniform(2,5)" aginduak f(2) = P(X=2) kalkulatzen du eta
"cdf_discrete_uniform(2,5)" aginduak F(2) = P(X<=2) non X ~ U(5)

```
--> [pdf_discrete_uniform(0,5),pdf_discrete_uniform(6,5)];
```

```
--> [pdf_discrete_uniform(2,5),pdf_discrete_uniform(4,5)];
```

```
--> [cdf_discrete_uniform(0,5),cdf_discrete_uniform(6,5)];
```

```
--> [cdf_discrete_uniform(2,5),cdf_discrete_uniform(4,5)];
```

7.1 Banaketa uniformearen neurriak

X ~ U(n) aldagiaren itxaropen matematikoa eta bariantza:

```
--> [%mu = (n+1)/2, %sigma^2 =(n^2-1)/12];
```

X ~ U(4) betetzen duen aldagaiaren neurriak agindu hauen bidez lortuko ditug

```
--> [mean_discrete_uniform(4)];
```

```
--> [var_discrete_uniform(4),std_discrete_uniform(4)];
```

```
--> [skewness_discrete_uniform(4),kurtosis_discrete_uniform(4)];
```

7.2 Alderantzizko funtzioa

X ~ U(n) betetzen duen aldagaiaren pertzentilak lortzeko "quantile_uniform(pe
agindua erabiliko dugu. Adibidez x = F^(-1)(0.5) eta x = F^(-1)(0.6) lortzeko
X ~ U(4) denean

```
--> P1 : quantile_discrete_uniform(0.5,4);
```

```
--> P2 : quantile_discrete_uniform(0.6,4);
```

7.3 Zorizko balioak

Hurrengo aginduarekin, X ~ U(4) banaketari jarraitzen dioten
10 zorizko balio lortzen ditugu

```
--> random_discrete_uniform(4,10);
```

n parametroa duen probabilitate banaketa uniformea, y = a, a+1, a+2, ..., b,
non n = b-a+1 balioei aplika dezakegu. Kasu honetan probabilitate banaketa e

```
   fy(y) =  1/(b-a+1) = 1/n,  y = a, a+1, a+2, ..., b denean
   fy(y) =  0              ,  y < a eta  y > b denan
```

Aldagaia adierazteko Y ~ U(a,b) erabiliko dugu.
Funtzio hau maxima-n era honetan defini dezakegu.

```
--> f(y,a,b):= block(if(y>=a and y<=b) then return(1/(b-a+1)) else return(0
```

8 Banaketa binomialaren hurbilketa Poissonen bana

n saiakuntza kopurua handia denean eta p arrakastaren propbabilitatea txikia
Banaketa binomialari jarraitzen dion XB ~ Bin(n,p) aldagaia, Poissonen banak
jarraitzen dion   XP ~ Poisson(%lambda = n*p) aldagaiaz hurbil dezakegu.

```
-->  n : 200 $ p : 0.05 $
     [n*p,n*(1-p)];
```

XB ~ Bin(200,0,05) denean P(XB<10):

```
-->  cdf_binomial(10,200,0.05);
```

Poissonen bidz hurbilketa

```
-->  lambda :n*p; float(cdf_poisson(10,lambda));
```

9 Dentsitate eta banaketa funtzioen adierazpen g

Probabilitate funtzioen edo banaketa funtzioen adierazpen grafikoak lortzeko
errazena honako hau da. [x, f(x)] edo [x, F(x)] balioez osatutako taula lort
eta wxplot2d agindua adierazpen grafikoarentzat. Adibidez, X ~ Bin(20,0.5) al
probabilitate funtzioa eta banaketa funtzioaren adierapenak agindu hauekin lo

```
-->  x : makelist(k, k, 0, 20);
```

```
-->  f : makelist(pdf_binomial(x[k],20,0.5),k,1,21);
```

```
-->  F : makelist(cdf_binomial(x[k],20,0.5),k,1,21);
```

```
-->  wxplot2d([discrete,x,f],[style,[points,3,2,2]]);
```

```
-->  wxplot2d([discrete,x,F],[style,[points,3,2,2]]);
```