

3.Gaia: Probabilitate-banaketa diskretuak

Cristina Alcalde - Arantxa Zatarain

Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoa - UPV/EHU

Zorizko aldagaiak

Definizioa

Izan bitez E zorizko saiakuntza eta S bere lagin-espazioa.
Honelako edozein funtziori:

$$X: S \rightarrow \mathbb{R}$$

zorizko aldagaia edo aldagai aleatorioa deitzen zaio.

Definizioa

X zorizko aldagaia diskretua da irudien kopurua finitua edo infinitu zenbatgarria bada.

Definizioa

X zorizko aldagaia jarraitua dela esango dugu tarte bateko balio guztiak har ditzakeenean.

Probabilitate funtzioa

Definizioa

Izan bitez X , S unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua, eta $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ har ditzakeen balioen multzoa. S -ren puntu bakoitzaren probabilitatea ezaguna bada, orduan, x_i balio bakoitzari bere probabilitatea erazten dion funtzioari probabilitate-funtzioa deitzen zaio.

$$P: \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow [0, 1] \\ x_i \mapsto P(X = x_i)$$

Probabilitate-funtzioa modu desberdinetan adieraz daiteke:

1. Probabilitate-funtzioaren deskribapena taula baten bidez.
2. Probabilitate-funtzioaren deskribapen analitikoa.

Banaketa-funtzioa

Definizioa

Izan bitez X , S unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua, eta $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ har ditzakeen balioen multzoa. Orduan, $F(x)$ banaketa-funtzioa probabilitate metatuen funtzioari deitzen zaio.

$$F: \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow [0, 1] \\ x_i \mapsto P(X \leq x_i)$$

hau da,

$$F(x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_i)$$

Banaketa diskretuaren batezbestekoa

Definizioa

Izan bitez:

- ▶ X S unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua.
- ▶ $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k\}$ X aldagaiak har ditzakeen balioen multzoa.
- ▶ $P(X = x_i)$ X aldagaiak x_i balioa hartzeko probabilitatea.

Orduan, X aldagai diskretuaren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa ondorengo balioari deituko diogu:

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i)$$

Banaketa diskretuaren bariantza

Definizioa

Izan bitez:

- ▶ X S unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua.
- ▶ $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k\}$ X aldagaiak har ditzakeen balioen multzoa.
- ▶ $P(X = x_i)$ X aldagaiak x_i balioa hartzeko probabilitatea.

Orduan, X aldagai diskretuaren bariantza ondorengo balioari deituko diogu:

$$\sigma_x^2 = \text{Bar}(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - \mu_x)^2 P(X = x_i)$$

Banaketa diskretuaren desbidazio tipikoa

Definizioa

X zorizko aldagai diskretuaren desbidazio tipikoa:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Populazio finitua

Definizioa

Esango dugu P populazioa finitua dela bere elementuen kopurua finitua bada.

Populazio dikotomikoa

Definizioa

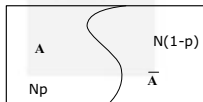
P populazioa dikotomikoa da bere elementuak, baldintza hauek betetezen dituzten bi klaseetan, A eta \bar{A} , banatzen badira.

$$A \cup \bar{A} = P \text{ eta } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Oharra: A klaseko frakzioa, P populazioan, p denean, \bar{A} klasekoa $1 - p$ izango da. Orduan, P -ren elementuen kopurua N bada:

A -ren elementuen kopurua = Np

\bar{A} -ren elementuen kopurua = $N(1 - p)$



Banaketa hipergeometrikoa

Definizioa

Izan bitez:

- ▶ P , N elementu dituen populazio finitua eta dikotomikoa:
 $P = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.
- ▶ A eta \bar{A} , P populazioa banatzen duten bi klaseak.
- ▶ \mathcal{M}_n , P populaziotik atera daitezkeen n tamainako lagin guztien multzoa ($n < N$ izanik).

Orduan, ondorengo zorizko aldagaiari zorizko aldagai hipergeometrikoa deitzen zaio:

$$X: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{N}$$

$$M \mapsto x$$

non x M laginean dauden A klaseko elementuen kopurua den.

Banaketa hipergeometrikoa

- ▶ $X \sim H(N, n, p)$ adieraziko dugu.
- ▶ A klaseko elementuei arrakastak deituko diegu.

Oharra

X aldagai hipergeometrikoaren balioen multzoa hau da:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \max[0, n - N(1 - p)] \leq x \leq \min(n, Np)\}$$

Banaketa hipergeometrikoa

Teorema

Izan bedi X zorizko aldagai hipergeometrikoa. Orduan:

- a) Probabilitate-funtzioa $P(X = x)$:

$$P(X = x) = h(x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- b) Banaketa hipergeometrikoaren batezbestekoa:

$$\mu_x = E(X) = np$$

- d) Bariantza eta desbiderapen tipikoa:

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} np(1-p)}$$

Banaketa binomiala

Definizioa

Izan bitez:

- ▶ P , populazio finitua edo infinitu zenbatgarria eta dikotomikoa.
- ▶ A eta \bar{A} , P populazioa banatzen duten bi klaseak.
- ▶ X_n , P populaziotik n elementu (itzulerekin) ateratzerakoan lor daitezkeen segida guztien multzoa.

Orduan, ondorengo zorizko aldagaiari zorizko aldagai binomiala deitzen zaio:

$$X: \mathcal{X}_n \longrightarrow \mathbb{N} \\ \{x_n\} \mapsto x$$

non $x \in \{x_n\}$ segidan dauden A klaseko elementuen kopurua den.

$X \sim B(n, p)$ adieraziko dugu.

Banaketa binomiala

Propietatea

Populazio infinitua denean ez dugu itzulera kontsideratuko, ateratze batekin A eta \bar{A} klaseen elementuen proportzioa ez delako aldatzen.

Propietatea

Aldagai binomialaren balioen eremua hau da: $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$

Banaketa binomiala

Teorema

Izan bitez:

- ▶ P , populazio finitua edo infinitu zenbatgarria eta dikotomikoa.
- ▶ p , A klasean dauden P -ren elementuen frakzioa.
- ▶ $1 - p$, \bar{A} klasean dauden P -ren elementuen frakzioa.

Orduan, X zorizko aldagai diskretu binomiala bada:

a) Probabilitate-funtzioa $P(X = x)$:

$$P(X = x) = b(n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

b) Banaketa binomialaren batezbestekoa: $\mu_x = E(X) = np$

d) Bariantza eta desbiderapen tipikoa:

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = np(1-p) \\ \sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$$

Banaketa polinomiala

Definizioa

Binomialaren orokortze bat da, non P populazioa k klase disjuntuetan banatzen da:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = P \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Populaziotik n tamainako laginak ateratzen ditugu eta X_i zorizko aldagai polinomialak laginean dauden A_i -ren elementuen kopurua neurtzen du.

$X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ aldagai k -dimentsionala aldagai polinomiala deitzen da.

Banaketa polinomiala

Definizioa

A_i klasean dauden P -ren elementuen frakzioa p_i bada ($i = 1, 2, \dots, k$), banaketa polinomialaren probabilitate-funtzioa honela kalkulatzen da:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

non $\sum_{i=1}^k n_i = n$

Poisson-en banaketa

Definizioa

Esango dugu X zorizko aldagai diskretu batek λ parametrodun Poisson-en banaketa bati jarraitzen diola, har ditzakeen balioak zenbaki oso positibo guztiak badira ondorengo probabilitate hauekin:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{non} \quad \begin{cases} k = 0, 1, 2, \dots \\ \lambda > 0 \end{cases}$$

eta adierazten da: $X \sim P(\lambda)$.

Poisson-en banaketa

Teorema

- a) Poissonen banaketaren batezbestekoa: $\mu_x = E(X) = \lambda$
- b) Poissonen banaketaren bariantza eta desbiderapen tipikoa:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \text{Var}(X) = \lambda \\ \sigma_x &= \sqrt{\lambda}\end{aligned}$$

Binomialaren hurbilketa

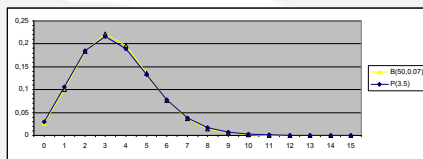
Poissonen banaketa, banaketa binomialaren hurbilketa on bat da n handia eta p txikia denean:

$$\left. \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ n \cdot p = \lambda \end{array} \right\} \text{Orduan } B(n, p) \approx P(\lambda)$$

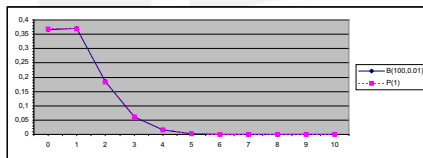
Binomialaren hurbilketa

Grafikoki:

- $n = 50$ eta $p = 0.07$ badira:



- $n = 100$ eta $p = 0.01$ badira:



Poissonen banaketa

Poissonen banaketa aplika daiteke fenomeno diskretuetan, fenomeno horiek denborako tarte batean 0, 1, 2, 3, ... aldietan gertatzen direnean, gertatzeko probabilitatea denborarekiko mantentzen bada.

Adibideak:

1. Bideko puntu batetik minutu batean pasatzen diren kotxeen kopurua.
2. Telefono-zentral batean minuturo jasotzen diren deien kopurua.
3. Supermerkatu bateko minutu batean kutxatik pasatzen diren bezeroen kopurua.
4. Gerra batean ordu eroritako bonben kopurua kilometro karratu batean.