# 3.Gaia:
# Probabilitate-banaketa diskretuak

Cristina Alcalde - Arantxa Zatarain

Donostiako Unibertsitate Eskola Politeknikoa - UPV/EHU

# Zorizko aldagaiak

## Definizioa

*Izan bitez $E$ zorizko saiakuntza eta $S$ bere lagin-espazioa. Honelako edozein funtziori:*

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

*zorizko aldagaia edo aldagai aleatorioa deitzen zaio.*

# Zorizko aldagaiak

## Definizioa

*Izan bitez $E$ zorizko saiakuntza eta $S$ bere lagin-espazioa. Honelako edozein funtziori:*

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

*zorizko aldagaia edo aldagai aleatorioa deitzen zaio.*

## Definizioa

*$X$ zorizko aldagaia diskretua da irudien kopurua finitua edo infinitu zenbatgarria bada.*

# Zorizko aldagaiak

**Definizioa**

*Izan bitez E zorizko saiakuntza eta S bere lagin-espazioa. Honelako edozein funtziori:*

$$X : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

*zorizko aldagaia edo aldagai aleatorioa deitzen zaio.*

**Definizioa**

*X zorizko aldagaia diskretua da irudien kopurua finitua edo infinitu zenbatgarria bada.*

**Definizioa**

*X zorizko aldagaia jarraitua dela esango dugu tarte bateko balio guztiak har ditzakeenean.*

# Probabilitate funtzioa

## Definizioa

*Izan bitez $X$, $S$ unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua, eta $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$ har ditzakeen balioen multzoa. $S$-ren puntu bakoitzaren probabilitatea ezaguna bada, orduan, $x_i$ balio bakoitzari bere probabilitatea erazten dion funtzioari probabilitate-funtzioa deitzen zaio.*

$$\begin{aligned} P\colon \{x_1, x_2, \ldots\} &\longrightarrow [0,1] \\ x_i \quad &\longmapsto P(X = x_i) \end{aligned}$$

# Probabilitate funtzioa

**Definizioa**

*Izan bitez $X$, $S$ unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua, eta $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$ har ditzakeen balioen multzoa. $S$-ren puntu bakoitzaren probabilitatea ezaguna bada, orduan, $x_i$ balio bakoitzari bere probabilitatea erazten dion funtzioari probabilitate-funtzioa deitzen zaio.*

$$\begin{aligned} P\colon \{x_1, x_2, \ldots\} &\longrightarrow [0,1] \\ x_i \quad &\longmapsto P(X = x_i) \end{aligned}$$

Probabilitate-funtzioa modu desberdinetan adieraz daiteke:

1. Probabilitate-funtzioaren deskribapena taula baten bidez.
2. Probabilitate-funtzioaren deskribapen analitikoa.

# Banaketa-funtzioa

## Definizioa

*Izan bitez $X$, $S$ unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua, eta $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}$ har ditzakeen balioen multzoa. Orduan, $F(x)$ banaketa-funtzioa probabilitate metatuen funtzioari deitzen zaio.*

$$\begin{aligned} F\colon \{x_1, x_2, \ldots\} &\longrightarrow [0,1] \\ x_i \quad &\longmapsto P(X \leq x_i) \end{aligned}$$

*hau da,*

$$F(x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_i)$$

# Banaketa diskretuaren batezbestekoa

## Definizioa

*Izan bitez:*

- $X$ $S$ *unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua.*
- $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k\}$ $X$ *aldagaiak har ditzakeen balioen multzoa.*
- $P(X = x_i)$ $X$ *aldagaiak* $x_i$ *balioa hartzeko probabilitatea.*

*Orduan,* $X$ *aldagai diskretuaren batezbestekoa edo itxaropen matematikoa ondorengo balioari deituko diogu:*

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i)$$

# Banaketa diskretuaren bariantza

## Definizioa

*Izan bitez:*

- $X$ $S$ *unibertsoan definiturik dagoen zorizko aldagai diskretua.*
- $\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k\}$ $X$ *aldagaiak har ditzakeen balioen multzoa.*
- $P(X = x_i)$ $X$ *aldagaiak* $x_i$ *balioa hartzeko probabilitatea.*

*Orduan,* $X$ *aldagai diskretuaren bariantza ondorengo balioari deituko diogu:*

$$\sigma_x^2 = Bar(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu_x)^2 P(X = x_i)$$

# Banaketa diskretuaren desbidazio tipikoa

### Definizioa

*X zorizko aldagai diskretuaren desbidazio tipikoa:*

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

# Populazio finitua

**Definizioa**

*Esango dugu P populazioa finitua dela bere elementuen kopurua finitua bada.*

# Populazio dikotomikoa

## Definizioa

*$P$ populazioa dikotomikoa da bere elementuak, baldintza hauek betetezen dituzten bi klaseetan, $A$ eta $\bar{A}$, banatzen badira.*

$$A \cup \bar{A} = P \text{ eta } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

# Populazio dikotomikoa

## Definizioa

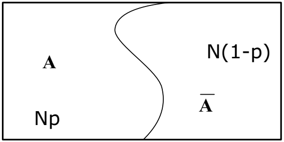
*$P$ populazioa dikotomikoa da bere elementuak, baldintza hauek betetezen dituzten bi klaseetan, $A$ eta $\bar{A}$, banatzen badira.*

$$A \cup \bar{A} = P \text{ eta } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

**Oharra:** $A$ klaseko frakzioa, $P$ populazioan, $p$ denean, $\bar{A}$ klasekoa $1 - p$ izango da. Orduan, $P$-ren elementuen kopurua $N$ bada:

$A$-ren elementuen kopurua $= Np$

$\bar{A}$-ren elementuen kopurua $= N(1 - p)$



# Banaketa hipergeometrikoa

## Definizioa

*Izan bitez:*

- $P$, $N$ *elementu dituen populazio finitua eta dikotomikoa:* $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$.
- $A$ *eta* $\bar{A}$, $P$ *populazioa banatzen duten bi klaseak.*
- $\mathcal{M}_n$, $P$ *populaziotik atera daitezkeen* $n$ *tamainako lagin guztien multzoa* ($n < N$ *izanik*).

*Orduan, ondorengo zorizko aldagaiari zorizko aldagai hipergeometrikoa deitzen zaio:*

$$\begin{aligned} X\colon \mathcal{M}_n &\longrightarrow \mathbb{N} \\ M &\longmapsto x \end{aligned}$$

*non* $x$ $M$ *laginean dauden* $A$ *klaseko elementuen kopurua den.*

# Banaketa hipergeometrikoa

- $X \sim H(N, n, p)$ adieraziko dugu.

# Banaketa hipergeometrikoa

- $X \sim H(N, n, p)$ adieraziko dugu.
- $A$ klaseko elementuei *arrakastak* deituko diegu.

# Banaketa hipergeometrikoa

- $X \sim H(N, n, p)$ adieraziko dugu.
- $A$ klaseko elementuei *arrakastak* deituko diegu.

## Oharra

*$X$ aldagai hipergeometrikoaren balioen multzoa hau da:*

$$\{x \in \mathbb{N} | \max\left[0, n - N(1-p)\right] \leq x \leq \min(n, Np)\}$$

# Banaketa hipergeometrikoa

## Teorema

*Izan bedi $X$ zorizko aldagai hipergeometrikoa. Orduan:*

a) *Probabilitate-funtzioa $P(X = x)$:*

$$P(X = x) = h(x) = \frac{\binom{Np}{x}\binom{N(1-p)}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

b) *Banaketa hipergeometrikoaren batezbestekoa:* $\mu_x = E(X) = np$

d) *Bariantza eta desbiderapen tipikoa:*

$$\sigma_x^2 = Bar(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}np(1-p)}$$

# Banaketa binomiala

## Definizioa

*Izan bitez:*

- $P$, *populazio finitua edo infinitu zenbatgarria eta dikotomikoa.*
- $A$ *eta* $\bar{A}$, $P$ *populazioa banatzen duten bi klaseak.*
- $\mathcal{X}_n$, $P$ *populaziotik* $n$ *elementu (itzulerarekin) ateratzerakoan lor daitezkeen segida guztien multzoa.*

*Orduan, ondorengo zorizko aldagaiari zorizko aldagai binomiala deitzen zaio:*

$$\begin{aligned} X : \mathcal{X}_n &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \{x_n\} &\mapsto x \end{aligned}$$

*non* $x$ $\{x_n\}$ *segidan dauden* $A$ *klaseko elementuen kopurua den.*

$X \sim B(n, p)$ *adieraziko dugu.*

# Banaketa binomiala

## Propietatea

*Populazio infinitua denean ez dugu itzulera kontsideratuko, ateratze batekin $A$ eta $\bar{A}$ klaseen elementuen proportzioa ez delako aldatzen.*

# Banaketa binomiala

## Propietatea

*Populazio infinitua denean ez dugu itzulera kontsideratuko, ateratze batekin $A$ eta $\bar{A}$ klaseen elementuen proportzioa ez delako aldatzen.*

## Propietatea

*Aldagai binomialaren balioen eremua hau da:* $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$

# Banaketa binomiala

## Teorema

*Izan bitez:*

- *$P$, populazio finitua edo infinitu zenbatgarria eta dikotomikoa.*
- *$p$, $A$ klasean dauden $P$-ren elementuen frakzioa.*
- *$1-p$, $\bar{A}$ klasean dauden $P$-ren elementuen frakzioa.*

*Orduan, $X$ zorizko aldagai diskretu binomiala bada:*

a) *Probabilitate-funtzioa $P(X=x)$:* $P(X=x) = b(n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

b) *Banaketa binomialaren batezbestekoa:* $\mu_x = E(X) = np$

d) *Bariantza eta desbiderapen tipikoa:*

$$\sigma_x^2 = Bar(X) = np(1-p)$$

$$\sigma_x = \sqrt{np(1-p)}$$

# Banaketa polinomiala

## Definizioa

*Binomialaren orokortze bat da, non $P$ populazioa $k$ klase disjuntuetan banatzen da:*

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = P$$
$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

*Populaziotik $n$ tamainako laginak ateratzen ditugu eta $X_i$ zorizko aldagai polinomialak laginean dauden $A_i$-ren elementuen kopurua neurtzen du.*

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ *aldagai $k$-dimentsionala aldagai polinomiala deitzen da.*

# Banaketa polinomiala

## Definizioa

*$A_i$ klasean dauden P-ren elementuen frakzioa $p_i$ bada* $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *banaketa polinomialaren probabilitate-funtzioa honela kalkulatzen da:*

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

*non* $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

# Poisson-en banaketa

## Definizioa

*Esango dugu $X$ zorizko aldagai diskretu batek $\lambda$ parametrodun Poisson-en banaketa bati jarraitzen diola, har ditzakeen balioak zenbaki oso positibo guztiak badira ondorengo probabilitate hauekin:*

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \quad \textit{non} \quad \begin{cases} k=0,1,2,\ldots \\ \lambda>0 \end{cases}$$

*eta adierazten da:* $X \sim P(\lambda)$.

# Poisson-en banaketa

**Teorema**

a) *Poissonen banaketaren batezbestekoa:* $\mu_x = E(X) = \lambda$

b) *Poissonen banaketaren bariantza eta desbiderapen tipikoa:*

$$\sigma_x^2 = Bar(X) = \lambda$$
$$\sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

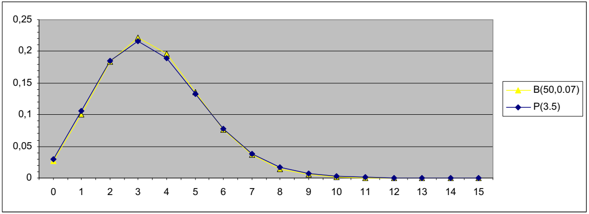
# Binomialaren hurbilketa

Poissonen banaketa, banaketa binomialaren hurbilketa on bat da $n$ handia eta $p$ txikia denean:

$$\left.\begin{array}{l} n \longrightarrow \infty \\ p \longrightarrow 0 \\ n \cdot p = \lambda \end{array}\right\} \qquad \text{Orduan} \qquad B(n,p) \approx P(\lambda)$$

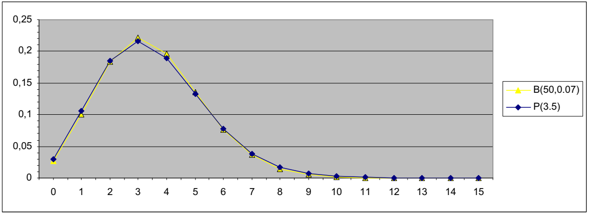
**Grafikoki:**

- $n = 50$ eta $p = 0.07$ badira:

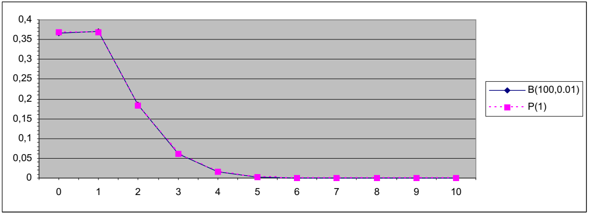


**Grafikoki:**

- $n = 50$ eta $p = 0.07$ badira:




- $n = 100$ eta $p = 0.01$ badira:



Poissonen banaketa aplika daiteke fenomeno diskretuetan, fenomeno horiek denborako tarte batean $0, 1, 2, 3, \ldots$ aldietan gertatzen direnean, gertatzeko probabilitatea denborarekiko mantentzen bada.

**Adibideak:**

1. Bideko puntu batetik minutu batean pasatzen diren kotxeen kopurua.
2. Telefono-zentral batean minuturo jasotzen diren deien kopurua.
3. Supermerkatu bateko minutu batean kutxatik pasatzen diren bezeroen kopurua.
4. Gerra batean orduro eroritako bonben kopurua kilometro karratu batean.