ALJEBRA: AUTOEBALUAZIO AZTERKETA

EBAZPENA

1. ARIKETA:

Hurrengo A matrizea izanik:

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$$

a) Kalkulatu p parametroko zein balioentzako matrizeak ez daukan alderantzizkorik.

b) p=2 kasurako, A matrizeak alderantzizkoa badauka? Erantzuna baiezkoa izan ezkero, alderantzizkoa kalkulatu adjuntua erabiliz eta Gauss-Jordan metodoa erabiliz

---

Ebazpena:

a) Matrize baten alderantzizkoa ez da existitzen bere determinantea 0 denean, $|A| = 0$. Beraz, A matrizearen determinantea kalkulatzen dugu eta p-ren zein balioetarako anulatzen den aztertzen dugu.

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = p^3 - p = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = \pm 1 \end{cases}$$

Hau da, p-k 0, +1 edo -1balioak hartzen dituenenean, A matrizeak ez dauka alderantzizkorik, beste kasu denetarako alderantzizkoa dauka.

b) p=2 baliorako, A matrizearen alderantzizkoa existitzen da, 0, +1 eta -1-en ezberdina delako. A matrizea beraz hurrengoa da:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lehenik eta behin matrize adjuntua erabiliz kalkulatuko dugu alderantzizkoa. Horretarako, alderantzizkoa kalkulatzeko formula gogoratuko dugu:

$$A^{-1} = \frac{A^a}{|A|}$$

Ezer baino lehen, A-ren determinantea kalkulatuko dugu, aurreko atalean egin dugun bezala p-ren parametroaren arabera:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1 = 6$$

Orain, A matrizearen adjuntua (A^a) kalkulatuko dugu. Horretarako, lehenengo matrizearen elementu bakoitzaren elementu adjuntua kalkulatu behar dugu, hau da, elementu bakoitzaren minorea dagokion zeinuarekin:

$$A^* = \begin{pmatrix} (+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Orain, matrize adjuntua aurrekoaren iraulia izango da:

$$A^a = \left(A^*\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Azkenik, formula aplikatuz alderantzizko matrizea kalkulatu dezakegu:

$$A^{-1} = \frac{A^a}{|A|} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Orain Gauss-Jordan metodoa aplikatuko dugu A matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko.

Gauss-Jordan-en metodoan $(A|I)$ sistema $(I\,|\,A^{-1})$ bihurtu behar da oinarrizko eragiketak aplikatuz, hau da

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Lehenengo, $a_{11} = 2$ elementua 1 bihurtzen saiatuko gara. Horretarako, eragiketa desberdinak egin daitezke: 1. errenkada zati 2 egiten, 1. eta 3. errenkadak elkar trukatzen, eta abar. Guk 2. aukera aplikatuko dugu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[e1\leftrightarrow e3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Orain, 1. zutabean diagonaletik kanpo dauden elementuak $a_{31} = 1$, eragiketak aplikatuz 0 bihurtu behar dira,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{e2=e2-e1 \\ e3=e3-2e1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Eta berriz hasiko gara. Bigarren diagonaleko elementua, $a_{22} = 3$, 1 bihurtu behar da,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[e2=e2/3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Orduan, bigarren zutabean, diagonaletik kanpo dauden elementuak eragiketak aplikatuz 0 bihurtu behar dira, kasu honetan lan hori eginda dago.

Orain, prozedura berdina aplikatzen da 3. zutabean. Lehenengo, diagonaleko elementua 1 bihurtu,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[e3=e3/(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Eta diagonaletik kanpo dauden elementuak, $a_{13}=1$, eragiketak aplikatuz 0 bihurtu behar dira,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[e1=e1-e3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bukatzeko, matrize alderantzizkoa identifikatzen badugu Gauss-Jordan-en metodoan.

$$(A\,|\,I) \rightarrow (I\,|\,A^{-1})$$

Orduan,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. ARIKETA:

Hurrengo ekuazio linealetako sistemarako:

$$\begin{cases} x-y+z=6 \\ -x-y+(a-4)z=7 \\ x+y+2z=11 \end{cases}$$

a) Sistema eztabaidatu a parametro errealaren arabera.

b) Ebatzi sistema a=4 kasurako.

Ebazpena:

a) Lehendabizi, sistema era matrizialean adierazten da, eta koefizienteen matrizea (*A*) eta matrize zabaldua (*AM*) definitzen dira:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ eta } AM = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & a-4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Sistema eztabaidatzeko koefizienteen matrizea eta matrize zabalduaren heina kalkulatu behar ditugu.

Gauss-en metodoa erabiliko dugu horretarako:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{e2=e2+e1 \\ e3=e3-e1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a-3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[e3=e3+e2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a-3 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

A matrizearen heina 2 izango da a parametroak 2 balio duenean eta 3 beste kasu guztietan:

$$a=2 \Rightarrow h(A)=2$$
$$a \neq 2 \Rightarrow h(A)=3$$

Modu berdinean AM matrizearen heina kalkulatzen dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & a-4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{e2=e2+e1 \\ e3=e3-e1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[e3=e3+e2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 0 & a-2 & 18 \end{pmatrix}$$

AM matrizearen heina 3 da beti.

Beraz, sistemaren eztabaida:

$$a = 2 \Rightarrow h(A) = 2 \neq h(AM) = 3 \rightarrow \text{ Sistema bateraezina}$$
$$a \neq 2 \Rightarrow h(A) = 3 = h(AM) = 3 \rightarrow \text{ Sistema bateragarri determinatua}$$

b) a=4 kasurako sistema bateragarri determinatua da eta soluzio bat edukiko du.

Gure sistema hurrengoa izango da:

$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

Sistema era matrizialean adierazten da, eta koefizienteen matrizea (*A*) eta matrize zabaldua (*AM*) definitzen ditugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ eta } AM = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Sistema eztabaidatzeko matrize zabaldua mailakatu dugunez, Gauss-en metodoa erabiliko dugu. Gure matrize zabaldua mailakatua hurrengoa da:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{pmatrix}$$

Lortutako matrize mailakatua ekuazioetako sistema bezala adierazten da eta beheko ekuaziotik hasita eta orden gorakorrean ekuazioak banan-banan ebazten dira.

$$\begin{cases} x - y + z = 6 & \Rightarrow \quad x - (-2) + 9 = 6 \Rightarrow \boxed{x = -5} \\ -2y + z = 13 & \Rightarrow \quad -2y + 9 = 13 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow \boxed{y = -2} \\ 2z = 18 \quad \Rightarrow & \boxed{z = 9} \end{cases}$$

Soluzioa hurrengoa da:

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases}$$

3. ARIKETA:

Hurrengo Polinomioaren erroak kalkulatu Ruffini-ren Teknika erabiliz.

$$p(x) = x^2 - 5x - 14$$

Ebazpena:

Lehenengo pausua da zatitzaileekin frogatzea, adibidez 7 erroarekin:

	1	**-5**	**-14**
7		7	14
	1	2	0

Beraz, 7 polinomioaren erroa da

Bigarren pausuan -2 erroarekin frogatuko dugu

	1	**-5**	**-14**
-2		-2	14
	1	-7	0

Beraz, -2 polinomioaren erroa da

Azkenik, polinomioaren adierazpena hurrengo eran ipini daiteke:

$$p(x) = x^2 - 5x - 14 = (x + 2)(x - 7)$$

4. ARIKETA:

Bila ezazu P(1,3,-4) puntuaren puntu simetrikoa $\pi \equiv 3x + y - 2z = 0$ planoarekiko.

Ebazpena:

1. pausoa: Lehenengo eta behin P(1,3,-4) puntua $\pi \equiv 3x + y - 2z = 0$ planoan ez dagoela ziurtatuko dugu:

$$3\cdot1+1\cdot3-2\cdot(-4)\neq0$$

2. pausoa: P puntutik igarotzen den eta π planoarekiko elkarzuta den *r* zuzena eraikiko dugu:

r ⊥ π denez, zuzenaren norabide bektorea π planoaren bektore normala da

$$\vec{n} = (3,1,-2)$$

Bektore normal hori eta P puntua erabiliz r zuzenaren ekuazio parametrikoak lortuko ditugu:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ z = -4 - 2\lambda \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$$

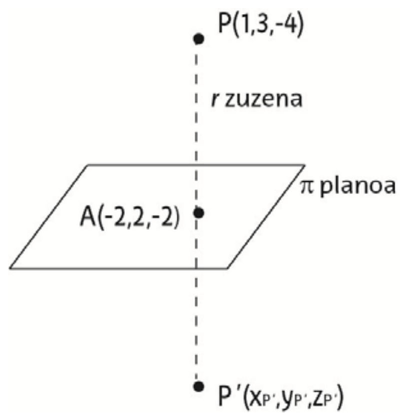
3. pausoa: π planoaren eta *r* zuzenaren arteko ebakidura puntua lortu dugu:

Horretarako, π planoaren ekuazio inplizituan r zuzenaren ekuazio parametrikoak ordezkatuko ditugu:

$$3\cdot(1+3\lambda)+(3+\lambda)-2\cdot(-4-2\lambda)=0 \; \square \; \lambda = -1$$

Ekuazio parametrikoetan $\lambda = -1$ balioa ordezkatuz π planoaren eta *r* zuzenaren arteko ebakidura puntua lortzen da: A(-2,2,-2)

4. pausoa: Jakinda A puntua P eta bere simetrikoa den P ′ puntuak osatzen duten segmentuko erdiko puntuan dagoela, hiru puntuen koordenatuen artean honako erlazioak betetzen dira:



$$\begin{cases} \dfrac{x_P + x_{P'}}{2} = x_A \\ \dfrac{y_P + y_{P'}}{2} = y_A \\ \dfrac{z_P + z_{P'}}{2} = z_A \end{cases}$$

Beraz, $P'(x_{P'}, y_{P'}, z_{P'})$ puntuaren kalkulua berehalakoa da:

$$\begin{cases} \dfrac{1+x_{P'}}{2} = -2 & \Rightarrow x_{P'} = -5 \\ \dfrac{3+y_{P'}}{2} = 2 & \Rightarrow y_{P'} = 1 \\ \dfrac{-4+z_{P'}}{2} = -2 & \Rightarrow z_{P'} = 0 \end{cases}$$

Orduan, P(1,3,-4) puntuaren puntu simetrikoa $\pi \equiv 3x + y - 2z = 0$ planoarekiko P ′(-5,1,0) puntua da.