A-IV BLOKEA: Ekuazio linealezko sistemak

1. ARIKETA:

Hurrengo ekuazio linealezko sistema ebatzi:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

a) Cramer-en erregela erabiliz.

b) Gauss-en metodoa erabiliz.

Ebazpena:

a) Lehendabizi, sistema era matrizialean adierazten da, eta koefizienteen matrizea (*A*) eta matrize zabaldua (*AM*) definitzen dira:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ eta } AM = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cramer-en erregela aplikatzen da sistema ebazteko.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+12-(9+2)}{2+6+6-(4+18+1)} = -\frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4+6-(8+1)}{(-9)} = -\frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{9}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&2\\2&3&0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{4+3-(2+12)}{(-9)}=\frac{7}{9}\quad\Rightarrow\quad z=\frac{7}{9}$$

Beraz, sistema bateragarri determinatua da eta bere soluzioa hurrengoa izanik:

$$\text{Ebazpena: }\begin{cases}x=-\dfrac{2}{9}\\ y=-\dfrac{1}{9}\\ z=\dfrac{7}{9}\end{cases}$$

b) Sistema era matrizialean adierazten da zabaldutako matrizearen (*AM*) bidez. Matrize zabalduan errenkadako oinarrizko eragiketak aplikatuko dira matrize mailakatu bat lortzeko asmoarekin:

$$AM=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&1&3&2\\2&3&1&0\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{E_1\leftrightarrow E_2}\begin{pmatrix}1&1&3&2\\2&1&2&1\\2&3&1&0\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{E_2-2E_1\\E_3-2E_1}}\begin{pmatrix}1&1&3&2\\0&-1&-4&-3\\0&1&-5&-4\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{E_3+E_2}\begin{pmatrix}1&1&3&2\\0&-1&-4&-3\\0&0&-9&-7\end{pmatrix}$$

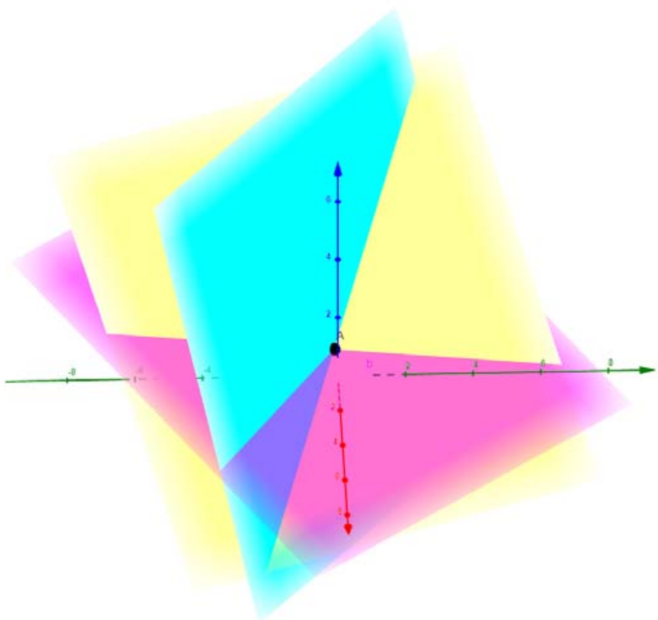
Lortutako matrize mailakatua ekuaziozko sistema bezala adierazten da eta beheko ekuaziotik hasita eta ordena gorakorrean ekuazioak banan-banan ebazten dira.

$$\begin{cases}x+y+3z=2 &\Rightarrow\quad x-\dfrac{1}{9}+3\dfrac{7}{9}=2\Rightarrow x=2-\dfrac{20}{9}\Rightarrow x=-\dfrac{2}{9}\\ -y-4z=-3 &\Rightarrow\quad -y-4\dfrac{7}{9}=-3\Rightarrow y=3-\dfrac{28}{9}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{9}\\ -9z=-7 &\Rightarrow\quad z=\dfrac{7}{9}\end{cases}$$

Ikusten den bezalaxe, a ataleko soluzio berdina lortzen da:

$$\text{Ebazpena: } \begin{cases} x = -\dfrac{2}{9} \\ y = -\dfrac{1}{9} \\ z = \dfrac{7}{9} \end{cases}$$

Lehenengo irudiak lortutako emaitzaren interpretazio grafikoa adierazten du. $2x + y + 2z = 1$, $x + y + 3z = 2$, eta $2x + 3y + z = 0$ planoak horiz, magentaz eta cianez irudikatuta daude, hurrenez hurren. Sistema, bateragarri determinatua denez planoen arteko ebakidura beltzez irudikatutako puntua (-2/9, -1/9, 7/9) da, hain zuzen ere.



1. Irudia. Ekuazio linealezko sistemaren adierazpen grafikoa.

2. ARIKETA:

Hurrengo ekuazio linealezko sistema ebatzi:

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -x+2y-z=-2 \\ x-z=-5 \end{cases}$$

Ebazpena:

Lehendabizi, sistema era matrizialean adierazten da, eta koefizienteen matrizea (*A*) eta matrize zabaldua (*AM*) definitzen dira:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ eta } AM = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Gauss-en metodoa aplikatuz matrize zabalduan, matrize mailakatu baten bidez adierazitako sistema baliokide bat lortzen da:

$$AM = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{E_1 \leftrightarrow E_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{E_2+E_1 \\ E_3+2E_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{E_3 \leftrightarrow E_2}$$

$$\underbrace{\sim}_{E_3 \leftrightarrow E_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{E_3-2E_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

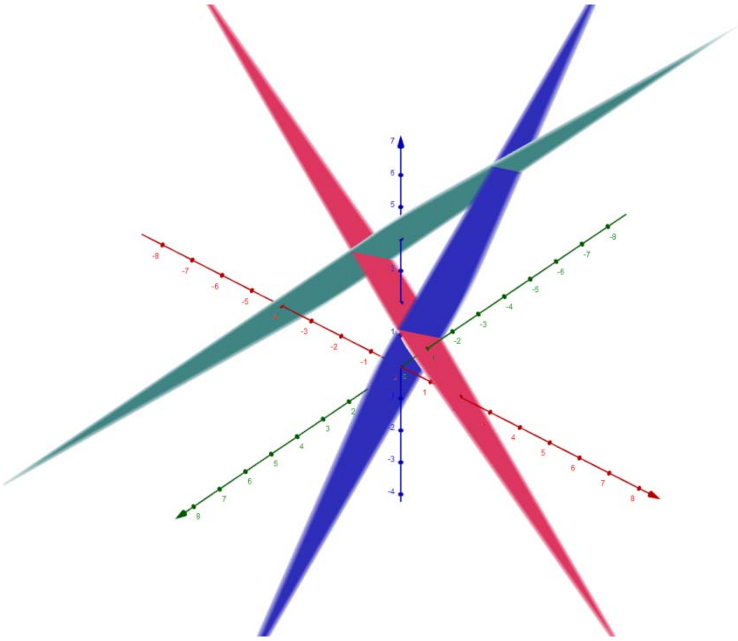
Rouche-Frobenius-en teorema erabiliz, ekuazio linealezko sistema ebazteko koefizienteen matrizearen eta matrize zabalduaren heina kalkulatu behar da. Aurretiaz lortutako matrize baliokidea erabiliz egingo dugu:

h$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$=2, beraz, h(*A*)=2

h$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$=3, beraz, h(*AM*)=3

$h(A) \neq h(AM)$ denez, sistema bateraezina da.

2. irudian sistema honen adierazpen grafikoa agertzen da. Bertan, ez da hiru planoen intersekzio punturik ikusten:



2. *Irudia. Ekuazio linealezko sistema bateraezinaren adierazpen grafikoa.*

3. ARIKETA:

Hurrengo ekuazio linealezko sistema ebatzi:

$$\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ -x+2z=1 \\ 2x+2y-z=-1 \end{cases}$$

Ebazpena:

Lehendabizi, sistema era matrizialean adierazten da, eta koefizienteen matrizea (*A*) eta matrize zabaldua (*AM*) definitzen dira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ eta } AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Errenkaden oinarrizko eragiketa elementalak aplikatuz, baliokidea den matrize zabaldua lortuko dugu, matrize honek hasierako ekuazio linealezko sistemarekiko baliokidea den sistema bat adierazten da:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{E_2+E_1 \\ E_3-2E_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{E_2/2 \\ E_3/3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{E_3+E_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Azken lerroa nulua da, beraz, erraz ikus daiteke A matrizearen heina eta *AM* matrizearen heina bi dela, baina ezezagun kopurua hiru denez, sistema bateragarri indeterminatua da, eta sistema honek infinitu soluzio izango ditu.

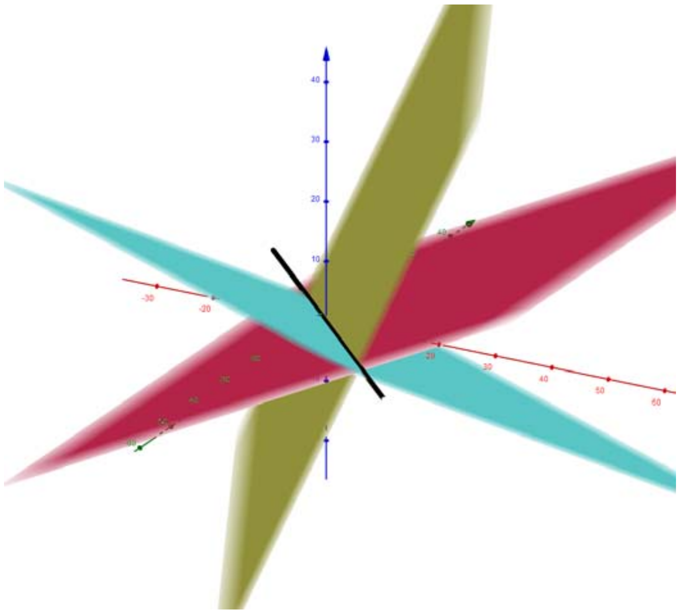
Sistema baliokidea ebatziz:

$$\begin{cases} x+2y+4z=1 \\ y+3z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=1-4z \\ y=1-3z \end{cases} \Rightarrow x+2\left(1-3z\right)=1-4z \quad \Rightarrow x=2z-1$$

Horrela, hurrengo soluzioa lortzen da:

$$\text{Soluzioa: } \begin{cases} x=2z-1 \\ y=1-3z \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

3. irudiko adierazpen grafikoak hiru planoetan edukita dagoen zuzenaren bitartez sistemaren infinitu soluzioak erakusten ditu:



3. Irudia. Ekuazio linealezko sistema bateragarri indeterminatuaren adierazpen grafikoa.