A-II BLOKEA: Matrizeak eta determinanteak- Matrize adjuntua, Determinantea eta Alderantzizkoa

1. ARIKETA:

Izan bedi hurrengo ***A*** matrizea:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

a) ***A*** matrizearen matrize adjuntua kalkulatu

b) ***A*** matrizearen determinantea kalkulatu errenkada edo zutabe baten elementuen bidezko garapenaren bidez

c) ***A*** matrizearen matrize alderantzizkoa (A^{-1}) kalkulatu

---

Ebazpena:

a) Lehenengo, matrizearen elementu bakoitzaren elementu adjuntua kalkulatu behar dugu, hau da, elementu bakoitzaren minorea dagokion zeinuarekin:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}
(+1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
(+1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} & (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} & (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}
\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 81 & -96 & 218 & -99 \\ 97 & 178 & -4 & 7 \\ -108 & 128 & 86 & 132 \\ 131 & 54 & -52 & 91 \end{pmatrix}$$

Orain, matrize adjuntua aurrekoaren iraulia izango da:

$$A^a = \left(A^*\right)^t = \begin{pmatrix} 81 & 97 & -108 & 131 \\ -96 & 178 & 128 & 54 \\ 218 & -4 & 86 & -52 \\ -99 & 7 & 132 & 91 \end{pmatrix}$$

b) Lehenengo zutabearen bidezko garapena erabiltzen badugu, A-ren determinantea horrela kalkulatuko da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41}$$

non a_{ij} *A* matrizearen elementu bat den eta A_{ij} a_{ij}-ren elementu adjuntua den. Beraz, balioak ordezkatzen baditugu:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (81) + 1 \cdot (97) + (-2) \cdot (-108) + 5 \cdot (131) = 1130$$

Beste zutabe bat aukeratu bagenu, emaitza berdina lortuko genuke. Hurrengoan determinantearen kalkulua ikus dezakegu hirugarren zutabeko elementuen garapenaren bidez:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

$$= 4\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(218) + 0 + 3\cdot(86) + 0 = 1130$$

Eta beste modu batetik ere, errenkada baten elementuak aukeratzen badira garapena egiteko, adibidez, bigarren errenkada, horrela kalkulatzen da:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{24}\cdot A_{24} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 6\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(97) + 6\cdot(178) + 0\cdot(-4) + (-5)\cdot(7) = 1130$$

Ondoriozta dezakegu edozein zutabe edo errenkada hartuz gero determinantearen kalkulua baliokidea dela.

c) Alderantzizkoa kalkulatzeko formula gogoratuko dugu:

$$A^{-1} = \frac{A^a}{|A|}$$

Hau da, matrize alderantzizkoa bere matrize adjuntua zati bere determinantea da. a) atalean matrize adjuntua kalkulatu dugu, eta aldiz, b) atalean *A* matrizearen determinantea. Beraz, ordezkatu besterik ez daukagu:

$$A^{-1} = \frac{A^a}{|A|} = \frac{1}{1130}\cdot\begin{pmatrix} 81 & 97 & -108 & 131 \\ -96 & 178 & 128 & 54 \\ 218 & -4 & 86 & -52 \\ -99 & 7 & 132 & 91 \end{pmatrix}$$

Eta bukatzeko, koefiziente bat matrize bat biderkatu edo zatitzen badu, elementu guztiak biderkatu edo zatituko ditu:

2. ARIKETA:

Hurrengo ***A*** matrizearen matrize alderantzizkoa kalkulatu Gauss-Jordan-en metodoa erabiliz.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ebazpena:

Gauss-Jordan-en metodoan $(A|I)$ sistema $(I\,|\,A^{-1})$ bihurtu behar da oinarrizko eragiketak aplikatuz, hau da

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & A^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

Lehenengo, $a_{11}=2$ elementua 1 bihurtzen saiatuko gara. Horretarako, eragiketa desberdinak egin daitezke: 1. errenkada zati 2 egiten, 1. eta 2. errenkadak elkar trukatzen, eta abar. Guk 2. aukera aplikatuko dugu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[e1\leftrightarrow e2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Orain, 1. zutabean diagonaletik kanpo dauden elementuak, $a_{21}=2$ eta $a_{31}=-2$, eragiketak aplikatuz 0 bihurtu behar dira,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{e2=e2-2e1 \\ e3=e3+2e1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Eta berriz hasiko gara. Bigarren diagonaleko elementua, $a_{22}=-13$, 1 bihurtu behar da,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[e2=e2/(-13)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Orduan, bigarren zutabean, diagonaletik kanpo dauden elementuak, $a_{12}=6$ eta $a_{32}=13$, eragiketak aplikatuz 0 bihurtu behar dira,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{e1=e1-6e2 \\ e3=e3-13e2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 24/13 & 6/13 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Orain, prozedura berdina aplikatzen da 3. zutabean. Lehenengo, diagonaleko elementua 1 bihurtu,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 24/13 & 6/13 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[e3=e3/7]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 24/13 & 6/13 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 0 & 1/7 \end{array}\right)$$

Eta diagonaletik kanpo dauden elementuak, $a_{13}=24/13$ eta $a_{23}=-4/13$, eragiketak aplikatuz 0 bihurtu behar dira,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 24/13 & 6/13 & 1/13 & 0 \\ 0 & 1 & -4/13 & -1/13 & 2/13 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 0 & 1/7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{e1=e1-24/13e3 \\ e2=e2+4/13e3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 18/(13\cdot7) & 1/13 & -24/(13\cdot7) \\ 0 & 1 & 0 & -3/(13\cdot7) & 2/13 & 4/(13\cdot7) \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 0 & 1/7 \end{array}\right)$$

Bukatzeko, matrize alderantzizkoa identifikatzen badugu Gauss-Jordan-en metodoan,

$$(A|I)\to(I\,|\,A^{-1})$$

Orduan,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 18/(13\cdot7) & 1/13 & -24/(13\cdot7) \\ -3/(13\cdot7) & 2/13 & 4/(13\cdot7) \\ 1/7 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.1978 & 0.0769 & -0.2637 \\ 0.0330 & 0.1539 & 0.0440 \\ 0.1429 & 0 & 0.1429 \end{pmatrix}$$