A-II BLOKEA: Matrizeak eta determinanteak-Determinantea

1. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo bi determinanteak Gauss-en metodoa aplikatuz:

a) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$

Ebazpena:

a) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix}$

Gauss-en metodoaren bidez ebazteko determinanteen propietateak aplikatu behar ditugu determinantea triangeluarra bilakatzeko, hau da, diagonaletik behera dauden elementu guztiak 0 egingo ditugu.

Kasu honetan ez daukagu 1-eko bat pibote bezala baina argi ikusten da 1. zutabearen azpian 0ak lortzeko errenkada guztiei 1. errenkada kenduko diegula:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} \underset{\substack{E_2-E_1 \\ E_3-E_1 \\ E_4-E_1}}{=} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & x-a & x-b & f-c \\ 0 & x-a & x-b & x-c \end{vmatrix}$$

Orain bigarren zutabean diagonalaren azpian dauden elementuak 0 egiteko errenkada hauei bigarren errenkada kendu behar diegu:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & x-a & x-b & f-c \\ 0 & x-a & x-b & x-c \end{vmatrix} \underset{\substack{E_3-E_2 \\ E_4-E_2}}{=} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & x-d & x-e \end{vmatrix}$$

Eta modu berdinean, orain 4. errenkadari 3. errenkada kentzen diogu 3. zutabeko diagonalaren azpian dagoen elementua 0 bilakatzeko:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & x-d & x-e \end{vmatrix} \underset{E_4-E_3}{=} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & 0 & x-f \end{vmatrix}$$

Bukatzeko, matrizea triangeluarra izateagatik, bere determinantearen balioa diagonaleko elementuen biderkadura izango da:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & 0 & x-f \end{vmatrix} = x\cdot(x-a)\cdot(x-d)\cdot(x-f)$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

Aurreko kasuan bezala, errenkadei 1. errenkada kenduko diegu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_2-E_1 \\ E_3-E_1 \\ \vdots \\ E_{n-1}-E_1 \\ E_n-E_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

Zuzenean lortu dugu diagonalaren azpian 0-ak edukitzea beraz orain determinantearen balioa diagonaleko elementuak biderkatzen lortzen da:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot (n-1) = (n-1)!$$

2. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo bi determinanteak Gauss-en metodoa aplikatuz.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Ebazpena:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Gauss-en metodoaren bidez ebazteko determinanteen propietateak aplikatu behar ditugu determinantea triangeluarra bilakatzeko, hau da, diagonaletik behera dauden elementu guztiak 0 egingo ditugu.

Teoriako propietateak aplikatuko ditugu aldiro, pibotea 1 izateko hasieran eta gero 0ak lortzeko:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} \underset{Z_1 \longleftrightarrow Z_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_2-3E_1 \\ E_3-3E_1 \\ E_4-6E_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & -1 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \\ 0 & -14 & -25 & -3 \end{vmatrix} \underset{Z_4 \longleftrightarrow Z_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -12 & -3 \\ 0 & -3 & -25 & -14 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -4 \\ 0 & -1 & -12 & -3 \\ 0 & -3 & -25 & -14 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_3-E_2 \\ E_4-3E_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{vmatrix} \underset{E_4 \longleftrightarrow E_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 11 \cdot 1 = 11$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Gauss-en metodoaren bidez ebazteko determinanteen propietateak aplikatu behar ditugu determinantea triangeluarra bilakatzeko, hau da, diagonaletik behera dauden elementu guztiak 0 egingo ditugu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_3-3E_1 \\ E_4-6E_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -15 & -10 & -5 \end{vmatrix} \underset{\frac{1}{5}\cdot E_4}{=} 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_3+E_2 \\ E_4+E_2}}{=} 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{E_4 \longleftrightarrow E_3}{=} -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} \underset{E_4+2E_3}{=} -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot 1 = -15$$