A-II BLOKEA: Matrizeak eta determinanteak- Heina

1. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo matrizearen heina bi metodo desberdin erabiliz:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ebazpena:

Matrizea ez da nulua eta 3 errenkada eta 4 zutabe ditu, badakigu beraz $1 \leq h(A) \leq 3$ dela.

Lehenik eta behin matrizea orlatuz kalkulatuko dugu heina. Horretarako nulua ez den 2x2-ko determinante bat hartzen dugu:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5-8=-3\neq 0$$

Orain orlatuko dugu matrizea 3. zutabe eta 3. errenkadarekin eta determinantea 0 den konprobatuko dugu:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5-4-4-(-10-1+8)=0$$

Determinante honek 0 ematen du, baina beste aukera bat daukagu, 3. errenkada eta 4. zutabearekin orlatzea:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-12+4-(-30+1+0)=21\neq 0$$

Beraz, h(A)=3

Orain Gauss-en metodoa aplikatuz kalkulatuko dugu heina, horretarako ikasitako propietateak erabiliz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{E_2+4E_1 \\ E_3+2E_1}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{E_3-E_2}{=} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Ez dago errenkada nulurik. Beraz, badakigu h(A)=3 dela.

2. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo matrizearen heina a parametroaren arabera:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ebazpena:

Ikusten dugu matrizea ez dela nulua, beraz h(A)≥1.

3 errenkada eta 4 zutabe dituenez, ziurtatu dezakegu ere h(A)≤3.

Orain bilatuko dugu 2x2-ko matrizea non determinantea 0-ren desberdina den:

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-2=2\neq 0$$

Hau topatuta esan dezakegu 2≤ h(A)≤3.

3x3-ko matrizeen determinanteak kalkulatu behar ditugu. Posibilitate guztiak aztertu beharrean, matrizea orlatuko dugu 2x2-ko matrizetik.

Horretarako orlatuko dugu 1. errenkadarekin eta 2. zutabearekin eta kalkulatuko dugu zein a-ren balioetarako determinantea egiten den 0:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a^2+4+2-(4a+a+4)=2a^2-5a+2$$

$$2a^2-5a+2=0 \Rightarrow a=2 \quad edo \quad a=\frac{1}{2}$$

Orain orlatuko dugu 1. errenkadarekin eta 3. zutabearekin:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a^3+4+2-(4a^2+a+4)=2a^3-4a^2-a+2$$

$$2a^3-4a^2-a+2=0=(a-2)(2a^2-1) \Rightarrow a=2 \quad edo \quad a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Bi determinante horiek anulatzen dira bakarrik a= 2 denean hortaz esan dezakegu:

$a=2$ denean $h(A) = 2$ eta $a \neq 2$ denean $h(A)=3$.