I. Ayesta, R. Fuente, U.Gil, I. Peña, J.I. Royo Prieto

K-V BLOKEA: Oinarrizko integralen kalkulua funtzio arrazionalak

1. ARIKETA:
Kalkula ezazu ondoko integral zehaztugabe hau karratua betetzearen teknika erabiliz:

$$\int \frac{x+1}{4x^2-4x+5}\,dx$$

Ebazpena:

Hasteko, ohar dezagun zenbakitzailearen maila (bat) izendatzailearen maila (bi) baino txikiagoa dela; hortaz, ez dago zatidura kalkulatzeko beharrik. Bigarren mailako ekuazioa ebazteko formula erabiliz (formula hori ezaguna izan zen 4000 urte baino gehiago dituela), badaukagu:

$$4x^2-4x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4\pm\sqrt{16-80}}{8}.$$

Diskriminantea negatiboa denez, ez dago erro errealik. Kasu hauetan, karratua betetzeko teknika erabil daiteke. Formula famatu hau erabiltzean datza teknika hori:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \tag{1}$$

Gisa honetako adierazpen bat lortzea dugu xedea:

$$A(x+B)^2+C, \quad A,B,C\in\mathbb{R} \tag{2}$$

zeinen bidez, ikusiko dugun legez, integrala aise kalkulatuko baita.

Entrenamendu moduan, manipula dezagun polinomio hau:

$$x^2+2x+2. \tag{3}$$

Bistan nabaria egin behar zaigu (eskarmentu apur batekin, eta halaxe gertatuko da) x^2+2x adierazpena $(x+1)^2=x^2+2x+1$ karratu perfektuaren garapenaren hasiera dela, eta ondorioz,

$$x^2+2x+2=(x^2+2x+1)+1=(x+1)^2+1$$

dugu, (2) itxurako adierazpen bat lortuz.

$4x^2-4x+5$ polinomioaren kasuan, ez dugu polinomio moniko bat ((3) polinomioa, aldiz, monikoa zen). Hortaz, lehen pausua koefiziente koadratikoa (x^2rekin doana) ateratzea izango da, x duten gai guztiak kontuan hartuz:

$$4x^2-4x+5=4(x^2-x)+5$$

Ez da beharrezkoa izango gai independentean faktore komuna ateratzea. Zentratuko gara, ba, parentesien arteko adierazpena (x^2-x) karratu perfektu gisan berridaztean. (1) erabiliz, badaukagu:

$$(x+B)^2=x^2+2Bx+B^2.$$

Beraz, $x^2 + 2Bx = x^2 - x$ izateko, nahitaezkoa da $B = -\frac{1}{2}$ hartzea. (2) adierazpenari begira, badaukagu, momentuz:

$$4(x - \tfrac{1}{2})^2 + C = 4(x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + C = 4x^2 - 4x + 1 + C.$$

Nabaria da $4x^2 - 4x + 5$ lortzeko $C = 4$ hartu behar dugula. Laburbilduz, badaukagu

$$4x^2 - 4x + 5 = 4(x - \tfrac{1}{2})^2 + 4,$$

eta integralean ordezkatuz,

$$I = \int \frac{x+1}{4x^2 - 4x + 5}\, dx = \int \frac{x+1}{4(x - \frac{1}{2})^2 + 4}\, dx = \frac{1}{4} \int \frac{x+1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1}\, dx. \tag{4}$$

Manipula dezagun, orain, azken zatiki hori. Hauxe da gure xedea: erraz integragarriak diren beste zatikien batura gisan berridaztea; zehazkiago, logaritmoen deribatuak eta arku tangenteen deribatuak (p'/p eta $u'/(1+u^2)$, hurrenez hurren) lortu behar ditugu. Komenigarria da, lehendik, zati logaritmikoa doitzea, eta bigarrenez, arku tangentearena. Horretarako, deriba dezagun deskonposa nahi dugun zatikiaren izendatzailea:

$$\frac{d}{dx}[(x - \tfrac{1}{2})^2 + 1] = 2(x - \tfrac{1}{2}) = 2x - 1$$

eta saia gaitezen adierazpen hori nola edo hala izendatzailean agertzea. Jarraian, gai independentea doituko dugu:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+2}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 1 + 3}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1}. \end{aligned}$$

Orain, (4) formulan ordeztuz eta integralaren linealtasuna erabiliz, badaukagu

$$I = \frac{1}{8} \int \frac{2x - 1}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1}\, dx + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + 1},$$

eta bi integral horiek berehalakoak dira. Hona hemen soluzioa:

$$I = \frac{1}{8} \operatorname{L} |(x - \tfrac{1}{2})^2 + 1| + \frac{3}{8} \arctan(x - \tfrac{1}{2}) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. ARIKETA:
Kalkula ezazu integral zehaztugabe hau:

$$\int \frac{x-9}{x(x+3)^2}\,dx$$

Ebazpena:

Hasteko, ohar dezagun zenbakitzailearen maila (bat) izendatzailearen maila (hiru) baino txikiagoa dela; hortaz, ez dago zatidura kalkulatzeko beharrik. Are gehiago, izendatzailea faktorizaturik dago, eta plantea dezakegu ondoko deskonposizio kanoniko hau, zatiki bakunetan:

$$\frac{x-9}{x(x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}. \tag{5}$$

A, B eta C parametro errealak kalkulatzeko, izendatzaile komuna ipin dezakegu:

$$\frac{x-9}{x(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2}{x(x+3)^2} + \frac{Bx(x+3)}{x(x+3)^2} + \frac{Cx}{x(x+3)^2} = \frac{A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx}{x(x+3)^2},$$

eta hortik abiaturik, zenbakitzaileak berdinduz,

$$x - 9 = A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}.$$

A, B eta C parametroak lortzeko era seguruena berdintza ikurraren bi aldeetako polinomioen koefizienteak identifikatzea da. Horretarako, gara dezagun eskuineko polinomioa, jarraian maila berdineko gaiak elkartuz:

$$\begin{aligned} x - 9 &= Ax^2 + 6Ax + 9A + Bx^2 + 3B + Cx \\ &= (A+B)x^2 + (6A+3B+C)x + 9A, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}. \end{aligned}$$

Bi polinomio horien koefizienteak berdinduz, hauxe da lorturiko sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 & \text{(koefiziente koadratikoak)} \\ 6A + 3B + C = 1 & \text{(koefiziente linealak)} \\ 9A = -9 & \text{(koefiziente independenteak)} \end{cases}$$

Sistemaren soluzioa berehala lortzen da: $A = -1, B = 1$ eta $C = 4$. Ondorioz, hauxe da (5) formulan planteaturiko deskonposizioa:

$$\frac{x-9}{x(x+3)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{4}{(x+3)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}.$$

Hortik abiaturik, integralean ordezkatuz eta linealtasuna erabiliz,

$$I = \int \frac{x-9}{x(x+3)^2}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{4}{(x+3)^2}\,dx,$$

eta jatorriko berehalako horiek ebatziz, soluzioa lortzen da:

$$\begin{aligned} I &= -\mathrm{L}\,|x| + \mathrm{L}\,|x+3| - \frac{4}{x+3} + K \\ &= \mathrm{L}\left|\frac{x+3}{x}\right| - \frac{4}{x+3} + K, \quad \forall K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}. \end{aligned}$$