K-V BLOKEA: Oinarrizko integralen kalkulua Zatikako integrazioa

1. ARIKETA:

Kalkula ezazu integral zehaztugabe hau:

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Ebazpena:

Integrakizuna e^x eta $\sin x$ funtzioen arteko biderkadura da; biak dira integratzeko errazak. Zatika integratuz, badaukagu:

$$\int e^x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u = \sin x & du = \cos x \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx. \tag{1}$$

Azken integral hori ez da berehalakoa, baina zatika integratuz:

$$\int e^x \cos x \, dx = \begin{vmatrix} u = \cos x & du = -\sin x \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{vmatrix} = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx. \tag{2}$$

Orain, (2) emaitza (1) formulan ordezkatuz:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \, dx &\overset{(1)}{=} e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ &\overset{(2)}{=} e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right) \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Kalkulatu nahi dugun integrala erraz aska daiteke, orain, berdintzaren bi muturretan agertzen baita:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Badaukagu jada nahi genuen jatorrikoa. Orain, egindako kalkuluak aprobetxatuz, erraz lor dezakegu beste jatorriko bat. Beraz,

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &\overset{(2)}{=} e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \\ &\overset{(3)}{=} e^x \cos x + e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C = e^x \frac{\sin x + \cos x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

"Aljebra eskuzabala da: eskatzen zaion baino gehiago ematen du sarritan."

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

2. ARIKETA:
Kalkula ezazu integral zehaztugabe hau:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

Ebazpena:

Deribatu hau erabiliko dugu:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Zatika integratuz,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \dfrac{1}{\cos^2 x} & du = 2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx \\ dv = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx & v = \tan x \end{matrix} \right| \\
&= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \tan x \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx.
\end{aligned} \tag{4}$$

Garatuko dugu, apartez, azken integral hori, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dela erabiliz:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx &= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx \\
&= \int \frac{dx}{\cos^4 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x} - \tan x.
\end{aligned} \tag{5}$$

Orain, (4) eta (5) konbinatuz,

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - 2\left(\int \frac{dx}{\cos^4 x} - \tan x\right)$$

lortzen dugu. Amaitzeko, enuntziatuko integrala aska dezakegu:

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + 2\tan x\right) + C, \quad \forall x \notin \{\,(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\,\}, C \in \mathbb{R}.$$

Hau da, jatorriko hori definituta dago x erreal guztietan, balio hauetan izan ezik:

$$\left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots \right\}.$$