K-IV BLOKEA: Funtzioen deribagarritasuna eta oinarrizko deribatuen kalkulua

1. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo funtzioaren deribatua:

$$y(x) = x \cdot e^{\sin(x^2)}$$

Ebazpena:

Lehenik eta behin, argi ikusi behar dugun lehenengo gauza, $y(x)$ funtzioa biderkatzen dauden beste bi funtzioen bitartez osatuta dagoela da. Hau da:

$$y(x) = \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{\sin(x^2)}}_{v(x)}$$

$u(x)$ eta $v(x)$ funtzioak deribagarriak direnez edozein x-ren baliotarako, orduan, bien arteko biderkadura ere deribagarria izango da. Hori horrela izanik, $y(x)$ funtzioaren deribatua hurrengo moduan kalkula dezakegu:

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$u'(x)$ eta $v'(x)$ kalkulatzen hasiko gara. Ohartu, $u(x) = x$ funtzioaren deribatua berehalakoa dela. Hots:

$$u'(x) = 1$$

Ohartu, $v(x) = e^{\sin(x^2)}$ funtzioa, funtzio konposatua dela eta hurrengo moduan deribatuko dela:

$$v'(x) = e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

Hurrengo pausua, $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ adierazpenean dagokion funtzioak ordezkatzea izango da:

$$y'(x) = 1 \cdot e^{\sin(x^2)} + x \cdot e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

Azkenik, bigarren batugaian eragiketak egingo ditugu funtzioa modu sinpleago batean adierazteko:

$$y'(x) = e^{\sin(x^2)} + 2x^2 \cdot e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2)$$

2. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo funtzioaren deribatua:

$$y(x)=\cos^3(2x+1)\cdot e^{-x^4}$$

Ebazpena:

Lehenik eta behin, argi ikusi behar dugun lehenengo gauza, $y(x)$ funtzioa biderkatzen dauden beste bi funtzioen bitartez osatuta dagoela da. Hau da:

$$y(x)=\underbrace{\cos^3(2x+1)}_{u(x)}\cdot\underbrace{e^{-x^4}}_{v(x)}$$

$u(x)$ eta $v(x)$ funtzioak deribagarriak direnez edozein x-ren baliotarako, orduan, bien arteko biderkadura ere deribagarria izango da. Hori horrela izanik, $y(x)$ funtzioaren deribatua hurrengo moduan kalkula dezakegu:

$$y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

$u'(x)$ eta $v'(x)$ kalkulatzen hasiko gara. Ohartu, $u(x)=\cos^3(2x+1)$ funtzio konpasatua dela. Beraz, bere deribatua hurrengoa izango da:

$$u'(x)=3\cdot\cos^2(2x+1)\cdot\left[-\sin(2x+1)\right]\cdot 2$$

$v(x)=e^{-x^4}$ ere, funtzio konposatua izanik, hurrengo moduan deribatuko da:

$$v'(x)=-4x^3\cdot e^{-x^4}$$

Hurrengo pausua, $y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ adierazpenean dagokion funtzioak ordezkatzea izango da:

$$y'(x)=3\cdot\cos^2(2x+1)\cdot\left[-\sin(2x+1)\right]\cdot 2\cdot e^{-x^4}+\cos^3(2x+1)\cdot\left(-4x^3\cdot e^{-x^4}\right)$$

Azkenik, eragiketak egingo ditugu funtzioa modu argiago baten adierazteko:

$$y'(x)=-6e^{-x^4}\cdot\cos^2(2x+1)\cdot\sin(2x+1)-4x^3\cdot e^{-x^4}\cdot\cos^3(2x+1)$$

$-e^{-x^4}$ faktore komuna kontuan hartzen badugu, badaukagu dagoeneko emaitza txukun adierazita:

$$y'(x)=-e^{-x^4}\left[6\cos^2(2x+1)\cdot\sin(2x+1)+4x^3\cdot\cos^3(2x+1)\right]$$

3. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo funtzioaren deribatua, $x \neq 0$ dela kontsideratuz:

$$y(x) = \frac{e^{-x}\cos(x^2)}{4x^2}$$

Ebazpena:

Lehenik eta behin, argi ikusi behar dugun lehenengo gauza, $y(x)$ funtzioa zatitzen dauden beste bi funtzioen bitartez osatuta dagoela da. Hau da:

$$y(x) = \frac{\overbrace{e^{-x}\cos(x^2)}^{u(x)}}{\underbrace{4x^2}_{v(x)}}$$

$u(x)$ eta $v(x)$ funtzioak deribagarriak badira, orduan, bien arteko zatidura ere deribagarria izango da, baldin $v(x) \neq 0$ bada . Hori horrela izanik, $y(x)$ funtzioaren deribatua hurrengo moduan kalkula dezakegu:

$$y'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

$u'(x)$ eta $v'(x)$ kalkulatzen hasiko gara. Kontuan hartu behar dugu $u(x)$ funtzioa biderkatzen dauden beste bi funtzioen bitartez osatuta dagoela: $u(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u_1(x)}\underbrace{\cos(x^2)}_{u_2(x)}$. Beraz, bere deribatua hurrengoa izango da:

$$u'(x) = u_1'(x)u_2(x) + u_1(x)u_2'(x) = -e^{-x}\cdot\cos(x^2) + e^{-x}\cdot\left[-\sin\left(x^2\right)\cdot 2x\right]$$

$v(x) = 4x^2$-ren deribatua aise kalkula daiteke:

$$v'(x) = 8x$$

Hurrengo pausua, $y'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ adierazpenean dagokion funtzioak ordezkatzea izango da:

$$y'(x) = \frac{\left[-e^{-x}\cdot\cos(x^2) + e^{-x}\cdot\left[-\sin\left(x^2\right)\cdot 2x\right]\right]4x^2 - \left[e^{-x}\cos(x^2)\right]\cdot 8x}{(4x^2)^2}$$

Azkenik, eragiketak egingo ditugu funtzioa modu argiago baten adierazteko:

$$y'(x)=\frac{-4x^2e^{-x}\cos(x^2)-8x^3e^{-x}\sin(x^2)-8xe^{-x}\cos(x^2)}{16x^4}$$

Zenbakitzailea eta izendatzailea amankomuneko $4x$-gatik sinplifikatuz:

$$y'(x)=\frac{-xe^{-x}\cos(x^2)-2x^2e^{-x}\sin(x^2)-2e^{-x}\cos(x^2)}{4x^3}$$

$-e^{-x}$ faktore komuna kontuan hartzen badugu:

$$y'(x)=\frac{-e^{-x}\left[x\cos(x^2)+2x^2\sin(x^2)+2\cos(x^2)\right]}{4x^3}$$

Azkenik, kortxetearen barrukoa antolatuz, badaukagu dagoeneko emaitza txukun adierazita:

$$y'(x)=\frac{-e^{-x}\left[(x+2)\cos(x^2)+2x^2\sin(x^2)\right]}{4x^3}$$

4. ARIKETA:

Kalkulatu hurrengo funtzioaren deribatua:

$$y(x) = L(\tan(2x)) + 3^{x^2} + \sin^2(5x+1)\cos(x^3) \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Ebazpena:

Lehenik eta behin, argi ikusi behar dugun lehenengo gauza, $y(x)$ funtzioa batzen dauden beste hiru funtzioen bitartez osatuta dagoela da. Hau da:

$$y(x) = u(x) + v(x) + w(x)$$

Non:

$$u(x) = L(\tan(2x))$$

$$v(x) = 3^{x^2}$$

$$w(x) = \sin^2(5x+1)\cos(x^3)$$

$u(x)$, $v(x)$ eta $w(x)$ funtzioak deribagarriak badira edozein x-ren baliotarako, orduan, haien arteko batura ere deribagarria izango da. Hori horrela izanik, $y(x)$ funtzioaren deribatua hurrengo moduan kalkula dezakegu:

$$y'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x)$$

Beraz, $u'(x)$, $v'(x)$ eta $w'(x)$ kalkulatzen hasiko gara:

$u(x)$ funtzioa, funtzio konposatua da: $u(x) = L(u_1(x))$ non $u_1(x) = \tan(2x)$

Beraz $u'(x) = \dfrac{1}{u_1(x)} u_1'(x)$

Aldi berean $u_1(x)$ beste funtzio konposatua da: $u_1(x) = \tan(u_2(x))$ non $u_2(x) = 2x$ eta bere deribatua horrela geratzen da:

$$u_1'(x) = \frac{1}{\cos^2(u_2(x))} u_2'(x)$$

Non $u_2'(x) = 2$

Guztira

$$u'(x) = \frac{1}{\tan(2x)} \frac{1}{\cos^2(2x)} 2$$

$v(x)$ ere funtzio konposatua da: $v(x) = 3^{v_1(x)}$ non $v_1(x) = x^2$. Beraz, bere deribatua horrela ebazten da:

$$v'(x) = 3^{v_1(x)} L(3) v_1'(x)$$

Eta $v_1'(x) = 2x$.

Beraz, guztira:

$$v'(x) = 3^{x^2} \; 2x \; L(3)$$

$w(x)$ bi funtzioen biderkadura da, beraz biderkaduraren deribatuaren adierazpena erabili behar dugu:

$$w'(x) = w_1'(x) w_2(x) + w_1(x) w_2'(x)$$

Non $w_1(x) = \sin^2(5x+1)$ eta $w_2(x) = \cos(x^3)$.

Aldi berean $w_1(x)$ funtzio konposatua da:

$$w_1(x) = \left(w_{11}(x)\right)^2$$

Eta $w_{11}(x) = \sin(w_{12}(x))$ non $w_{12}(x) = 5x+1$

Beraz:

$$w_1'(x) = 2 w_{11}(x) w_{11}'(x)$$

$$w_{11}'(x) = \cos(w_{12}(x)) w_{12}'(x)$$

Beraz:

$$w_1'(x) = 2 w_{11}(x) \cos(w_{12}(x)) w_{12}'(x) = 2\sin(5x+1)\cos(5x+1)5$$

Aldi berean $w_2(x)$ funtzio konposatua da:

$$w_2(x) = \cos(w_{21}(x))$$

Non $w_{21}(x)=x^3$.

Beraz deribatua horrela geratuko da:

$$w_2'(x)=-\sin(w_{21}(x))w_{21}'(x)=-\sin(x^3)3x^2$$

Azkenean, emaitza partzialak lortu direnean, funtzio konposatuen biderkaduraren lortuko dugu:

$$w'(x)=w_1'(x)w_2(x)+w_1(x)w_2'(x)=2\sin(5x+1)\cos(5x+1)5\cos(x^3)-\sin^2(5x+1)\sin(x^3)3x^2$$

Emaitza beraz:

$$y'(x)=2\frac{1}{\tan(2x)}\frac{1}{\cos^2(2x)}+3^{x^2}\;2x\;L\left(3\right)+2\sin(5x+1)\cos(5x+1)5\cos(x^3)-\sin^2(5x+1)\sin(x^3)3x^2$$